Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

4) Formulierung des Newtonschen Gesetzes

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

noch heute die Kräfte der Analysis übersteigt und mit Hilfe der Störungstheorie nur Näherungslösungen gefunden hat. Dafs in Wahrheit beide Körper sich (von den Störungen abgesehen) nicht in Kreisen, sondern in ähnlichen Ellipsen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen, der dabei in je einem der Brennpunkte der Ellipsen liegt, sei beiläufig bemerkt. Die Bahnen könnten ebenso gut Parabeln oder Hyperbeln sein, also Kegelschnitte überhaupt. Darin hat man das Gesetz für die Bewegung der Doppelsterne.

4) Formulierung des Newtonschen Gesetzes.

Aus der Erfahrung wufste man von jeher, dafs ein Stein von doppelter Masse das doppelte Gewicht eines solchen von einfacher Masse hat, und so drängte sich Newton die Annahme auf, dafs die gegenseitigen Anziehungen den Massen der Körper proportional sein müfsten. Oben war aber schon gezeigt, dafs sie umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung seien, demnach konnte die Anziehung oder Gravitation nur in der Form $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ oder in der Form $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ dargestellt werden, wo k irgend eine konstante Gröfse ist.

Das Newtonsche Anziehungsgesetz sagt demnach folgendes aus:

Je zwei Weltkörper ziehen sich gegenseitig an mit einer Kraft $p = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$, die also proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes ihrer Mittelpunkte ist.

Die Annahme, dafs bei Kugeln die Mittelpunkte mafsgebend seien, war zunächst nur eine instinktive Vermutung, die später von Newton durch eine interessante Berechnung als richtig nachgewiesen wurde. Unten wird sie in vereinfachter Form ausgeführt werden.

Die Bedeutung der Konstante k ergiebt sich aus folgendem: Ist sowohl m_1 als auch m_2 gleich der Masseneinheit und r gleich der Längeneinheit, so ist die Anziehung $p = k\frac{1 \cdot 1}{1^2} = k$. Demnach ist k diejenige Anziehung, die zwei irgendwie gewählte Masseneinheiten in einem Abstande, der gleich der irgendwie gewählten Längeneinheit ist, aufeinander ausüben. Selbstverständlich kann man die Wahl der Masseneinheit so treffen, dafs $k = 1$ wird; auch kann man k zunächst willkürlich gleich 1 setzen. Davon soll bisweilen Gebrauch gemacht werden, weil es sich dann um die einfachere Form $p = \frac{m_1 m_2}{r^2}$ handelt. Die Gröfse von k soll unten bestimmt werden. Zu ihrer Kenntnis ist die der mittleren Dichte des Erdkörpers nötig.

Ist nämlich m_1 die Masse des Erdkörpers, m_2 die eines Steines, so ist an der Erdoberfläche nach dem Newtonschen Gesetze die Anziehung

$$p = k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

zugleich nach der Definition der Schwerkraft

$$p = m_2 g.$$

Da die linken Seiten gleich sind, sind auch die rechten gleich, also ist

$$k\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 g$$

oder

$$k = \frac{r^2 g}{m_1},$$

wo g die mittlere Schwerebeschleunigung 9,822, r der Erdradius, m_1 die Erdmasse ist. Vorläufig folgt daraus die Beziehung

$$g = k\frac{m_1}{r^2}.$$

Diese giebt zunächst die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche an, wenn m_1 die Erdmasse, r die Entfernung des Steines vom Mittelpunkte der Erde ist; sie gilt aber auch für die Centripetalbeschleunigung des von der Erde angezogenen Mondes, sobald nur r die Entfernung desselben vom Erdmittelpunkte bedeutet.

Setzt man für m_1 die Sonnenmasse, so gilt die Gleichung für die Centripetalbeschleunigung, welche einen Planeten abhält, sich von der Sonne zu entfernen.

5) Eins der Kepplerschen Gesetze. Das hier zu sagende gilt zunächst für Kreisbahnen. Die Anziehung der Sonne gebe einem Planeten die Centripetalbeschleunigung

$$g_1 = \frac{mk}{r_1^2} = \frac{4\, r_1 \pi^2}{t_1^2},$$

einem andern

$$g_2 = \frac{mk}{r_2^2} = \frac{4\, r_2 \pi^2}{t_2^2}$$

dann folgt durch Division

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{t_2^2}{t_1^2}$$

oder

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$