Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

5) Eins der Keplerschen Gesetze

so ist an der Erdoberfläche nach dem Newtonschen Gesetze die Anziehung

$$p = k \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

zugleich nach der Definition der Schwerkraft

$$p = m_2 g.$$

Da die linken Seiten gleich sind, sind auch die rechten gleich, also ist

$$k \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 g$$

oder

$$k = \frac{r^2 g}{m_1},$$

wo g die mittlere Schwerebeschleunigung 9,822, r der Erdradius, m_1 die Erdmasse ist. Vorläufig folgt daraus die Beziehung

$$g = k \frac{m_1}{r^2}.$$

Diese giebt zunächst die Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche an, wenn m_1 die Erdmasse, r die Entfernung des Steines vom Mittelpunkte der Erde ist; sie gilt aber auch für die Centripetalbeschleunigung des von der Erde angezogenen Mondes, sobald nur r die Entfernung desselben vom Erdmittelpunkte bedeutet.

Setzt man für m_1 die Sonnenmasse, so gilt die Gleichung für die Centripetalbeschleunigung, welche einen Planeten abhält, sich von der Sonne zu entfernen.

5) Eins der Kepplerschen Gesetze. Das hier zu sagende gilt zunächst für Kreisbahnen. Die Anziehung der Sonne gebe einem Planeten die Centripetalbeschleunigung

$$g_1 = \frac{mk}{r_1^2} = \frac{4 r_1 \pi^2}{t_1^2},$$

einem andern

$$g_2 = \frac{mk}{r_2^2} = \frac{4 r_2 \pi^2}{t_2^2}$$

dann folgt durch Division

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{t_2^2}{t_1^2}$$

oder

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

Folglich: Die Quadrate der Umlaufszeiten beider Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Entfernung.

Ist z. B. m_1 doppelt so weit von der Sonne entfernt, wie m_2, und ist t_1, die Umlaufszeit von m_1, gleich einem Jahre, so ist

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8},$$

folglich $t_2 = t_1\sqrt{8} = \sqrt{8}$ Jahre $= \sim 2{,}83$ Jahre.

Aus der Entfernung erhält man so die Umlaufszeit, aus der Umlaufszeit die Entfernung. Die erstere ergiebt sich durch Beobachtung, die letztere durch Rechnung.

6) Massenverhältnisse der Weltkörper.

Man kann dieselbe Methode benutzen, die Verhältnisse der Massen zu ermitteln, indem man einen der Sonne gehorchenden Planeten und einen zum letzteren gehörigen Trabanten (Mond) betrachtet.

Die Anziehung der Erde auf den Mond giebt als Beschleunigung

$$\frac{4\,r\pi^2}{t^2} = k\frac{m}{r^2},$$

die von der Sonne auf die Erde ausgeübte Anziehung giebt als Beschleunigung

$$\frac{4\,R\pi^2}{t_1^2} = k\frac{M}{R^2},$$

wo R die Entfernung der Erde von der Sonne, t_1 ihre Umlaufszeit, M die unbekannte Masse der Sonne ist. Durch Division erhält man

$$\frac{r}{R}\frac{t_1^2}{t^2} = \frac{m}{M}\cdot\frac{R^2}{r^2},$$

folglich ist

$$M = m\frac{R^3}{r^3}\frac{t^2}{t_1^2}.$$

Setzt man die Umlaufszeit des Mondes gleich 39 343 Minuten, die der Erde (das Jahr) gleich 525 950 Minuten, setzt man ferner die mechanisch oder trigonometrisch zu berechnenden Entfernungen R und r gleich 20 000 000 bezw. 50 000 Meilen, also $\frac{R}{r} = \frac{400}{1}$, so folgt

$$M = 400^3 \cdot \frac{39\,343^2}{525\,950^2} m = \sim 358\,120 \text{ m}.$$

Unter den gemachten Annahmen ist also die Sonnenmasse das 358 000fache der Erdmasse. Genauere Berechnungen ergeben das 355 000fache.