Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel II. Die Gravitationskurve $y=1/x^2$ und der Potentialbegriff.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

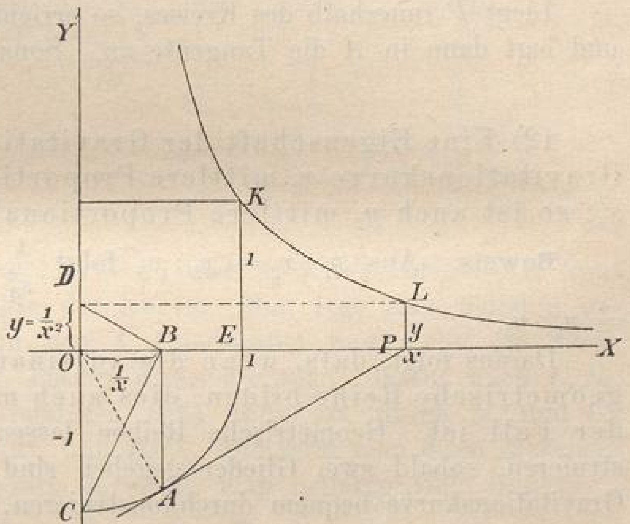
Kapitel II.

Die Gravitationskurve $y = \frac{1}{x^2}$ und der Potentialbegriff.

11) Erste Konstruktion der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$.

Angenommen im Punkte O befinde sich die dort festgehaltene Masse 1, auf der X-Achse befinde sich frei beweglich ebenfalls die Masse 1, und diese werde von der ersteren nach dem Newtonschen Gesetz angezogen, dann ist die Anziehung $p = k\frac{1 \cdot 1}{x^2} = \frac{k}{x^2}$. Um jedoch ganz einfache Formeln zu erhalten, wollen wir die Gravitationskonstante $k = 1$ setzen, so daſs $p = \frac{1}{x^2}$ wird. Um ein Bild von dem Verhalten in verschiedenen Lagen zu bekommen, errichte man an jeder Stelle der X-Achse ein Lot $y = \frac{1}{x^2}$, dann liegen die Endpunkte der Lote auf einer Kurve, deren Gleichung durch die letzte Beziehung gegeben ist. Ihr Lauf soll nur im ersten Quadranten verfolgt werden.

Fig. 3.



Man erhält einigen Überblick schon dadurch, daſs man an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ die Lote

$$y_1 = \frac{1}{1^2} = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad y_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad y_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}, \ldots$$

errichtet, an den Stellen $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ die Lote 4, 9, 16, 25, ... Auch beliebig viele Zwischenwerte kann man konstruieren, und leicht erkennt man, daſs für $x = \infty$ der Wert von $y = 0$, für $x = 0$ dagegen $y = \infty$ wird, so daſs die Koordinatenachsen Asymptoten der Kurve werden.

Man findet für jeden beliebigen Punkt P der X-Achse vom Abstand $OP = x$ die Ordinate bequem folgendermaſsen: Man schlage um O den Einheitskreis, lege an ihn von P aus die Tangente PA, fälle vom Berührungspunkte A aus auf die X-Achse das Lot AB (so daſs nach Pythagoras $OB \cdot OP = OA^2$ oder $OB \cdot x = 1$, also $OB = \frac{1}{x}$ ist), verbinde B mit C und errichte auf CB im Punkte B ein Lot bis zum Schnittpunkte D mit der Y-Achse, dann ist $CD = y$ die gesuchte Ordinate. Vollendung des Rechtecks $PODL$ giebt den zu P gehörigen Punkt L der Kurve.

Beweis. Es war $OB = \frac{1}{x}$. Nach bekanntem Satze ist $OD : OB = OB : OC$ oder $OD : \frac{1}{x} = \frac{1}{x} : 1$, also ist $OD = \frac{1}{x^2}$, und ebenso $PL = \frac{1}{x^2}$. L ist also ein Punkt der gesuchten Kurve.

Liegt P innerhalb des Kreises, so errichtet man erst das Lot PA und legt dann in A die Tangente an. Sonst ändert sich nichts.

12) Eine Eigenschaft der Gravitationskurve. Ist bei der Gravitationskurve x_2 mittlere Proportionale zwischen x_1 und x_3, so ist auch y_2 mittlere Proportionale zwischen y_1 und y_3.

Beweis. Aus $x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ folgt $\frac{1}{x_1^2} : \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{x_2^2} : \frac{1}{x_3^2}$ oder $y_1 : y_2 = y_2 : y_3$.

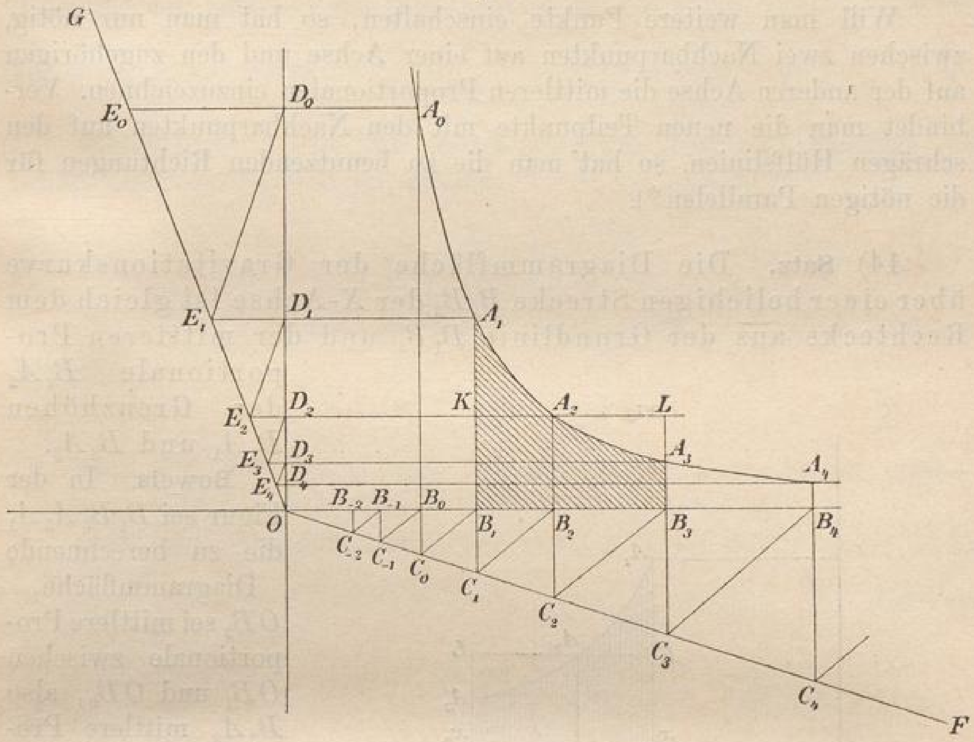
Daraus folgt, daſs, wenn die aufeinander folgenden x eine geometrische Reihe bilden, dies auch mit dem zugehörigen y der Fall ist. Geometrische Reihen lassen sich aber leicht konstruieren, sobald zwei Glieder gegeben sind, folglich läſst sich die Gravitationskurve bequem durchkonstruieren, sobald man neben dem zu $x = 1$ gehörigen Punkte K noch einen zweiten, L, kennt.

Die obige Eigenschaft hat übrigens die vorliegende Kurve mit allen Kurven von der Gleichung $y = x^p$ gemein, d. h. mit allen Parabeln höherer Ordnung, zu denen auch die gleichseitige Hyperbel als Isotherme oder Mariottesche Kurve, die Adiabate für Luft und Wasserdampf und andere gehören. (Vgl. Method. Lehrbuch der Math. III, von Seite 162 ab.)

Die nachstehende Konstruktion gilt also von allen diesen Kurven

13) **Aufgabe.** (Zweite Konstruktion der Kurve.) Aus zwei Punkten A_1 und A_2 der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ (allgemeiner $y = x^p$) beliebig viele ihrer Punkte zu konstruieren.

Fig. 4.



Auflösung. A_1 ($x = 1$, $y = 1$) und A_2 (nach voriger Art konstruiert) seien zwei Punkte der Kurve. Man lege eine beliebig gerichtete Hilfslinie OF in den 4. Quadranten und ziehe die Senkrechten $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ bis zu dieser Geraden, darauf noch C_1B_2. Legt man Parallele zur letzteren B_1C_0 und C_2B_3 durch B_1 und C_2, und darauf Senkrechte C_0B_0 und B_3C_3, und setzt man diese Zickzack-Konstruktion beiderseits fort, so erhält man beliebig viele Punkte

$$\ldots, B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$$

auf der X-Achse, deren Abstände eine geometrische Reihe bilden.

Ebenso lege man eine beliebig gerichtete Gerade OG in den 2. Quadranten, ziehe von A_1 und A_2 aus die Horizontalen $A_1D_1E_1$ und $A_2D_2E_2$, verbinde D_1 mit E_1 und mache dieselbe Konstruktion wie vorher, so daſs man auf der Y-Achse Punkte

$$\ldots, D_{-3}, D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1, D_2, D_3 \ldots$$

erhält.

Die Senkrechte und Wagerechte durch je zwei gleichzahlige der auf beiden Koordinatenachsen gefundenen Punkte geben je einen Schnittpunkt, und so erhält man beliebig viele Punkte

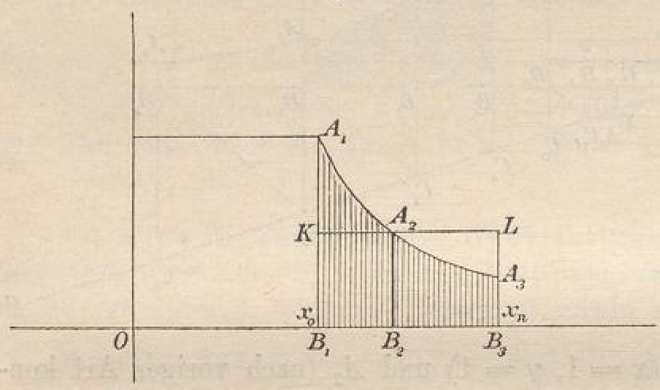
$$\ldots, A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$$

der Kurve.

Will man weitere Punkte einschalten, so hat man nur nötig, zwischen zwei Nachbarpunkten auf einer Achse und den zugehörigen auf der anderen Achse die mittleren Proportionalen einzuzeichnen. Verbindet man die neuen Teilpunkte mit den Nachbarpunkten auf den schrägen Hülfslinien, so hat man die zu benutzenden Richtungen für die nötigen Parallelen*).

14) **Satz.** Die Diagrammfläche der Gravitationskurve über einer beliebigen Strecke $B_1 B_3$ der X-Achse ist gleich dem Rechtecke aus der Grundlinie $B_1 B_3$ und der mittleren Proportionale $B_2 A_2$ der Grenzhöhen $B_1 A_1$ und $B_3 A_3$.

Fig. 5.



Beweis. In der Figur sei $B_1 B_3 A_3 A_1$ die zu berechnende Diagrammfläche, OB_2 sei mittlere Proportionale zwischen OB_1 und OB_3, also $B_2 A_2$ mittlere Proportionale zwischen $B_1 A_1$ und $B_3 A_3$. Man denke sich $B_1 B_3$ in zahlreiche gleiche Teile eingeteilt und durch entsprechende Lote die Fläche in senkrechte Streifen zerlegt. Die Teilpunkte auf der X-Achse seien der Reihe nach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, die zugehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Multipliziert man die Grundlinie jedes Streifens mit seiner Anfangshöhe und bildet man die Summe der Produkte, so erhält man bei endlicher Anzahl der Streifen zu Grofses, aber für $n = \infty$ den richtigen Inhalt. Wählt man die Endhöhen, so erhält man zunächst zu Kleines,

*) Diese Art des Konstruierens ist in technischen Kreisen sehr beliebt, da nur Verschiebung des Winkelhakens auf der Reifsschiene erforderlich ist. Sie gilt auch für die Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel und der adiabatischen Kurven. Bildet man auf der einen Achse die Punkte der geometrischen Reihe, trägt man aber auf der andern Achse gleiche Abstände ab, so erhält man eine logarithmische Linie.

aber für $n = \infty$ das Richtige. Also mufs man erst recht für $n = \infty$ Richtiges erhalten, wenn man irgend welchen Mittelwert zwischen Anfangs- und Grenzhöhe als Höhe jedes Streifens wählt, z. B. das arithmetische Mittel, oder, was besondere Einfachheit giebt, die mittlere Proportionale. Für den ersten Streifen wird bei Anwendung der letzteren die Höhe gleich $\sqrt{y_0 y_1}$, also sein Inhalt gleich

$$(x_1 - x_0)\sqrt{y_0 y_1} = (x_1 - x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{1}{x_1^2}} = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}.$$

Bildet man ebenso den Inhalt für jeden folgenden Streifen, so erhält man als Summe der Inhalte

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right).$$

Hier hebt sich mit Ausnahme von $\frac{1}{x_0}$ und $-\frac{1}{x_n}$ alles weg, so dafs man erhält

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n}.$$

Für unendlich grofse Zahl der Streifen ist dies absolut richtig. Aber für jede beliebige Anzahl kommt dasselbe heraus.

Dasselbe erhält man aber auch, wenn man die Grundlinie $x_n - x_0$ mit $\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_n}$ multipliziert, denn $(x_n - x_0)\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n}$. Also ist

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = (x_n - x_0)\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_n} = (x_n - x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{1}{x_n^2}}$$

$$= (x_n - x_0)\sqrt{\frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{y_n}}.$$

$\sqrt{\frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{y_n}}$ ist aber die mittlere Proportionale der Grenzhöhe, also ist der Satz als richtig bewiesen. Zugleich aber ist gezeigt, dafs der Inhalt auch gleich dem Produkte aus der Längeneinheit und dem Unterschiede der reziproken Werte der Anfangs- und End-Abscisse ist.

Reicht das Diagramm von x_0 bis $x = +\infty$, so erhält man als Fläche

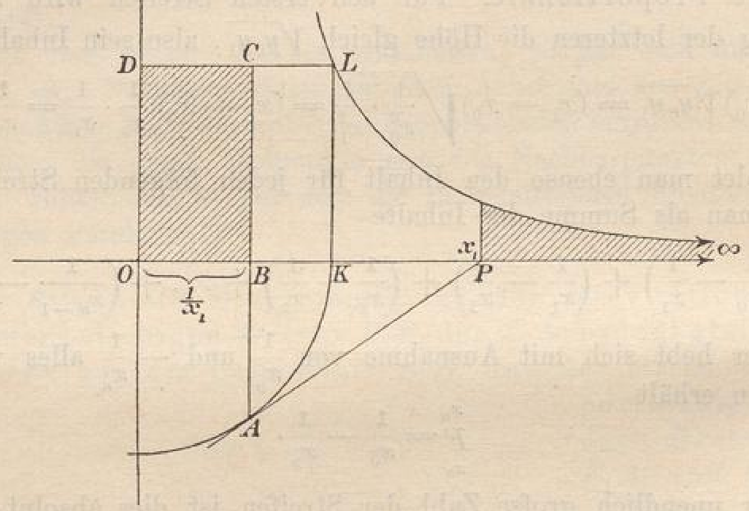
$$\overset{x=\infty}{\underset{x_0}{F}} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{x_0} - 0 = \frac{1}{x_0}.$$

Also: Die Diagrammfläche von x_0 bis ∞ ist gleich dem Rechtecke aus der Längeneinheit und dem umgekehrten Werte von x_0.

15) Einfachste Konstruktion des Inhalts der Diagrammflächen.

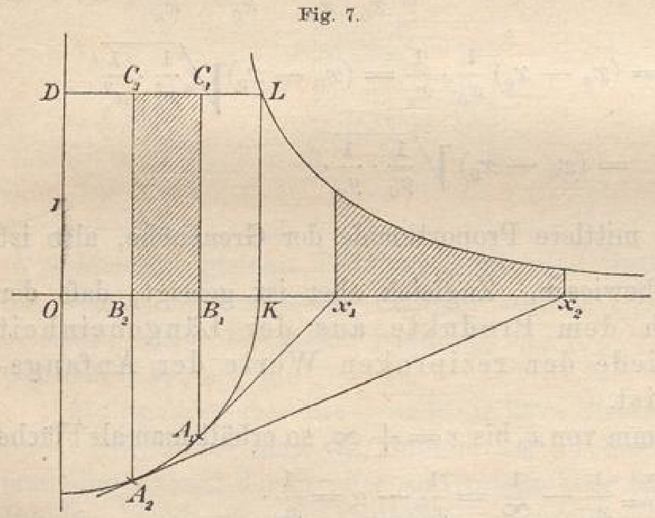
a) Um die Fläche des von x_1 bis ∞ reichenden Diagramms zu konstruieren, ziehe man von $P\,(OP = x_1)$ aus an den um O geschlagenen

Fig. 6.



Einheitskreis die Tangente PA und lege durch den Berührungspunkt A die Senkrechte ABC. Diese schneidet vom Quadrate $OKLD$ über der Einheitsstrecke OK das Rechteck $OBCD$ ab. Der Inhalt des letzteren ist, da nach dem Früheren $OB = \frac{1}{x_1}$ ist, gleich $\frac{1}{x_1} \cdot 1$ und damit gleich der Fläche des Diagramms. Ist $x_1 = 1$, so ist das Diagramm gleich 1. Ist $x_1 < 1$, so ist erst das Lot, dann die Tangente zu ziehen, und das

Fig. 7.



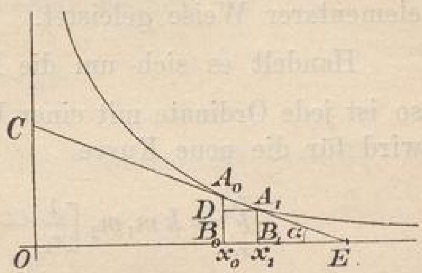
Rechteck wird größer als die Flächeneinheit. Ist $x_1 = o$, so ist es unendlich groß.

Ist die Einheit nicht gegeben, so findet man sie durch Halbierung des rechten Winkels BOD. Die Winkelhalbierende schneidet in L.

b) Um die Diagrammfläche $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ graphisch darzustellen, ziehe man die Tangenten $P_1 A_1$ und $P_2 A_2$. Die von den Berührungspunkten aus gezogenen Senkrechten geben im Einheitsquadrate das Rechteck $B_1 C_1 C_2 B_2$, welches den Inhalt des Diagramms angiebt. Denn

$$OB_1 C_1 D - OB_2 C_2 D = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}.$$

Fig. 8.



16) **Aufgabe.** Die Tangenten der Gravitationskurve zu konstruieren.

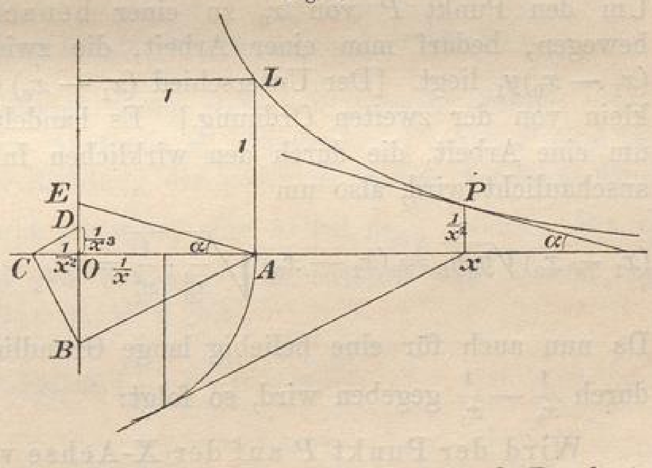
Auflösung. Man denke sich zwei benachbarte Punkte A_0 und A_1 der Kurve verbunden. Die Verbindungslinie gebe auf den Koordinatenachsen die Schnittpunkte C und E. Sind die Abscissen x_0 und x_1, die Ordinaten y_0 und y_1, und setzt man $\sphericalangle\, OEC = \alpha$, so ist

$$\tan\alpha = \frac{y_0 - y_1}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_1^2}}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_0^2 x_1^2 (x_1 - x_0)} = \frac{(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)}{x_0^2 x_1^2 (x_1 - x_0)} = \frac{x_1 + x_0}{x_0^2 x_1^2}.$$

Läfst man nun die Punkte x_0 und x_1 so nahe aneinander rücken, dafs man $x_1 = x_0$ setzen kann, so wird $\tan\alpha = \frac{2\,x_0}{x_0^4} = \frac{2}{x_0^3}$.

Dies giebt folgende Tangentenkonstruktion für einen Punkt P mit der Abscisse x. Man mache auf der Y-Achse $BO = \frac{1}{x}$, ziehe AB $(OA = 1)$, errichte auf AB in B ein Lot bis zum Schnitte C mit der X-Achse, errichte auf BC in C ein Lot bis zum Schnitte D mit der Y-Achse, mache $OE = 2\,OD$ und ziehe EA. Die durch P gelegte Parallele zu EA giebt die Tangente.

Fig. 9.



Beweis. $OB = \frac{1}{x}$, folglich $OC = \frac{1}{x^2}$, folglich $OD = \frac{1}{x^3}$, folglich $OE = \frac{2}{x^3}$, folglich $\tan\alpha = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{x^3}$.

Beispiel. Für $x = 1$ erhält man $\tan \alpha = \frac{2}{1}$. Die Neigung in L ist also leicht zu konstruieren. Man macht auf der X-Achse $AV = +\frac{1}{2}$ und verbinde V mit L, was die Tangente giebt.

Damit ist alles Erforderliche für die Gravitationskurve in elementarer Weise geleistet.

Handelt es sich um die Kurve $y = k\frac{m_1 m_2}{x^2}$, oder um $y = k\frac{m_1}{x^2}$, so ist jede Ordinate mit einer Konstanten zu multiplizieren. Demnach wird für die neue Kurve

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right] \text{ bezw. } k m_1 \left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right].$$

Die Konstruktion der Kurve geschieht so, dafs man wie früher $\frac{1}{x^2}$ konstruiert, aber das $km_1 m_2$-fache oder km_1-fache als Lot aufträgt. Bei der Tangentenkonstruktion wird $\tan \alpha = \frac{2km_1 m_2}{x^2}$ bezw. $\frac{2km_1}{x^2}$. Beispiele werden unten gegeben.

17) Mechanische Bedeutung der Diagrammfläche. Befindet sich im Punkte O die festgehaltene Masse 1 und ist der Massenpunkt P auf der X-Achse freibeweglich und ebenfalls mit der Masse 1 belegt, so ist die Anziehung für jede Lage x von der Gröfse $y = \frac{1}{x^2}$. Um den Punkt P von x_0 zu einer benachbarten Stelle x_1 zu bewegen, bedarf man einer Arbeit, die zwischen $(x_1 - x_0)y_0$ und $(x_1 - x_0)y_1$ liegt. [Der Unterschied $(x_1 - x_0)(y_0 - y_1)$ ist unendlich klein von der zweiten Ordnung.] Es handelt sich in Wirklichkeit um eine Arbeit, die durch den wirklichen Inhalt des Streifens veranschaulicht wird, also um

$$(x_1 - x_0)\sqrt{y_0 y_1} = (x_1 - x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{1}{x_1^2}} = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}.$$

Da nun auch für eine beliebig lange Grundlinie $x_1 - x_0$ der Inhalt durch $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$ gegeben wird, so folgt:

Wird der Punkt P auf der X-Achse von x_0 bis x_1 geführt, so beansprucht dies die Arbeit $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$.

Ist dagegen in O die Masse m_1, in P die Masse m_2 angebracht, so ist, wenn aufserdem die Anziehungskonstante k berücksichtigt wird die Arbeit $A = km_1 m_2\left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right]$.

Sind wiederum x_0 und x_1 benachbarte Werte, so entspricht dem kleinen Wege $w = x_1 - x_0$ eine Arbeit

$$pw = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0 x_1},$$

oder, wenn x_0 und x_1 gleich gesetzt werden können,

$$(x_1 - x_0)\frac{1}{x_0^2} = pw.$$

Setzt man den Potentialwert $\frac{1}{x_0} = V_0$, den Potentialwert $\frac{1}{x_1} = V_1$, so folgt als Arbeit für diese kleine Bewegung

$$pw = V_0 - V_1,$$

oder Kraft mal Kraftweg = Potentialdifferenz.

Daraus aber folgt

$$p = \frac{V_0 - V_1}{w},$$

d. h. Kraft = $\frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Weg}}$ = Potentialgefälle = G.

Berücksichtigt man noch m_2 und die Anziehungskonstante k, so ist die Kraft nicht gleich, aber proportional dem Potentialgefälle d. h.

$$p = km_2\frac{V_0 - V_1}{w} = km_2 G = km_1 m_2 \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_0} = km_1 m_2 \frac{1}{r_0 r_1}.$$

Von diesem Satze wird häufig Gebrauch gemacht werden.

Giebt man dem im Abstande x_1 befindlichen Punkte P eine Geschwindigkeit v in der Richtung der positiven reellen Achse, so kann er infolge seiner Wucht (Energie) eine Arbeit $m_2\frac{v^2}{2}$ leisten. Bis zu welcher Stelle wird er sich bewegen? Er entfernt sich so weit, bis seine Energie aufgezehrt ist, d. h. bis

$$km_1 m_2\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right) = m_2\frac{v^2}{2}$$

ist, oder bis

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} = \frac{v^2}{2km_1}$$

ist, also bis zum Abstande

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x_1} - \frac{v^2}{2km_1}} = \frac{2kx_1 m_1}{2km_1 - x_1 v^2}.$$

Setzt man den Inhalt des Diagramms gleich A, so bewegt sich der Punkt soweit, bis

$$A = m_2 \frac{v^2}{2}$$

ist.

Läfst man den Punkt P an einer Stelle x_1 los, und fällt er infolge der Anziehung in der Richtung nach O, so erreicht er an der Stelle x eine Geschwindigkeit, die sich aus

$$\frac{m_2 v^2}{2} = A = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right]$$

ergiebt. Es wird also

$$v = \sqrt{\frac{2A}{m_2}},$$

wo A das Arbeitsdiagramm ist.

Wird der Punkt in unendlicher Entfernung losgelassen, so handelt es sich um

$$\frac{m_2 v^2}{2} = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right] = \frac{k m_1 m_2}{x},$$

seine Geschwindigkeit an der Stelle x ist also

$$v = \sqrt{\frac{2 k m_1}{x}} = \sqrt{2 k m_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Das Geschwindigkeitsdiagramm, welches entsteht, wenn man für jeden Punkt x die Geschwindigkeit, mit der er passiert wird, als Lot errichtet, ist also eine Parabel von der Ordnung $-\frac{1}{2}$. Für $2km_1 = 1$ läfst sich die Kurve am einfachsten konstruieren, denn $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist mittlere Proportionale zwischen 1 und $\frac{1}{x}$.

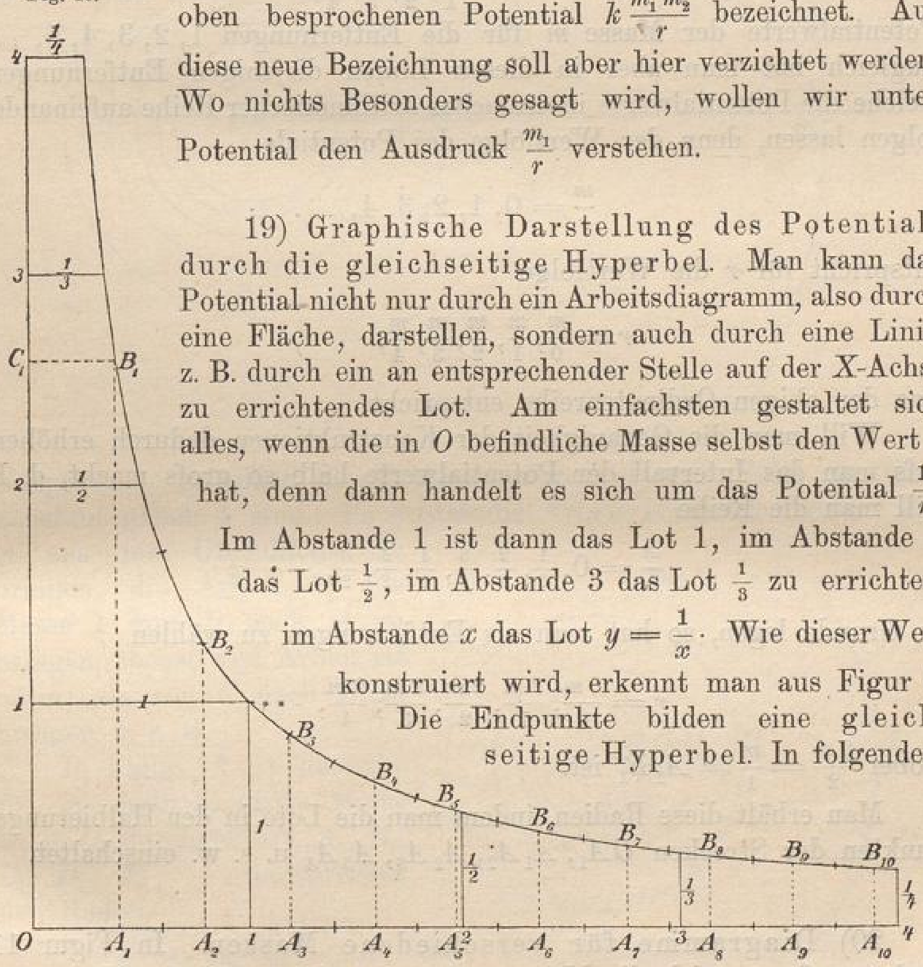
18) Der Potentialbegriff. Die Arbeit, die nötig ist, um den Punkt P aus der Lage x in unendliche Entfernung zu bringen, bezeichnet man als **das Potential** des in O befindlichen Punktes m_1 in Bezug auf den Massenpunkt m_2 für die Lage x. Das Potential wird also durch das bis ins Unendliche reichende Arbeitsdiagramm graphisch dargestellt Es ist gleich $\frac{k m_1 m_2}{x}$.

Andere verstehen unter Potential den Ausdruck $-\frac{k m_1 m_2}{x}$, also die Arbeit, die vom anziehenden Punkte an dem beweglichen geleistet wird, um ihn aus unendlicher Entfernung in die Lage x zu bringen.

Dieser Unterschied ist aber hier ohne wesentliche Bedeutung. Wenn hier $+$, statt $-$ genommen wird, so geschieht dies im Anschlufs an Thomson und Tait, lediglich des leichteren Verständnisses wegen.

Man spricht häufig von dem Potentialwerte der in O befindlichen Masse m_1 für irgend einen Punkt des Raumes oder der Ebene, der etwa in der Entfernung r liegen möge. Dabei wird dann angenommen, dafs der freie Massenpunkt die Masse 1 habe, so dafs es sich um $\frac{m_1 \cdot 1}{r}$ oder $\frac{m_1}{r}$ handelt. Zugleich ist dabei $k = 1$ gesetzt. Diesen auf die Einheit von m_2 und auf $k = 1$ reduzierten Wert hat man als die Potentialfunktion im Gegensatze zum oben besprochenen Potential $k\frac{m_1 m_2}{r}$ bezeichnet. Auf diese neue Bezeichnung soll aber hier verzichtet werden. Wo nichts Besonders gesagt wird, wollen wir unter Potential den Ausdruck $\frac{m_1}{r}$ verstehen.

Fig. 10.



19) Graphische Darstellung des Potentials durch die gleichseitige Hyperbel. Man kann das Potential nicht nur durch ein Arbeitsdiagramm, also durch eine Fläche, darstellen, sondern auch durch eine Linie, z. B. durch ein an entsprechender Stelle auf der X-Achse zu errichtendes Lot. Am einfachsten gestaltet sich alles, wenn die in O befindliche Masse selbst den Wert 1 hat, denn dann handelt es sich um das Potential $\frac{1}{r}$. Im Abstande 1 ist dann das Lot 1, im Abstande 2 das Lot $\frac{1}{2}$, im Abstande 3 das Lot $\frac{1}{3}$ zu errichten, im Abstande x das Lot $y = \frac{1}{x}$. Wie dieser Wert konstruiert wird, erkennt man aus Figur 6. Die Endpunkte bilden eine gleichseitige Hyperbel. In folgendem tritt häufig an den Lehrer die Anforderung heran, für eine anziehende Masse m die Werte $\frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \frac{m}{5}, \cdots$ schnell zu zeichnen. Zu diesem Zwecke konstruiere man sich eine Schablone, ein Kurven-

lineal, welches von den Schenkeln eines rechten Winkels und von der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ begrenzt wird, wobei $OP = 1$ ein für allemal bestimmt angenommen ist. Ist nun z. B. $OC_1 = \frac{m}{1}$, so giebt die Horizontale $C_1 B_1$ die Ordinate

$$A_1 B_1 = \frac{m}{1}.$$

Trägt man $C_1 B_1$ von O aus beliebig oft auf der X-Achse ab, was $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ giebt, so hat man in den Ordinaten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3, \ldots$ die gesuchten Strecken $\frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \cdots$ Dies sind z. B. die Potentialwerte der Masse m für die Entfernungen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Zugleich hat man aber in diesen Linien diejenigen Entfernungen, welche die Potentialwerte in einfacher arithmetischer Reihe aufeinander folgen lassen, denn der Wertfolge des Potentials

$$\frac{m}{r} = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

entspricht für r die Wertfolge

$$r = \frac{m}{0}, \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \ldots,$$

was der obigen Ordinatenreihe entspricht.

Will man die Genauigkeit der Konstruktionen dadurch erhöhen, daſs man das Intervall der Potentialwerte halb so groſs macht, d. h. will man die Reihe

$$\frac{m}{r} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \ldots$$

zu Grunde legen, so hat man als Entfernungen zu wählen

$$r = \frac{2m}{0}, \frac{2m}{1}, \frac{2m}{2}, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{4}, \ldots$$

wobei $\frac{2m}{2} = \frac{m}{1} = A_1 B_1$ ist.

Man erhält diese Radien, indem man die Lote in den Halbierungspunkten der Strecken OA_1, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ u. s. w. einschaltet.

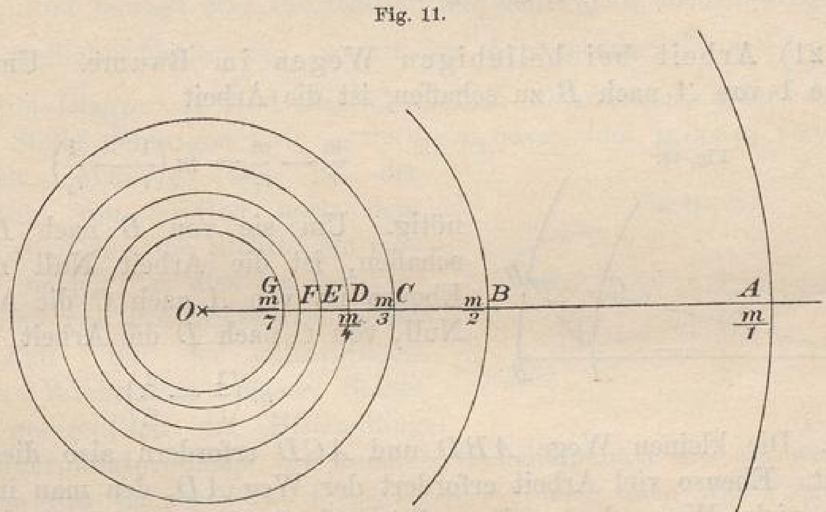
20) Diagramme für verschiedene Massen. In Figur 11 sind um O, wo sich die Masse m befindet, koncentrische Kreise geschlagen, an deren Stelle Kugeln zu denken sind. Die Radien sind der Figur 10 entnommen, der gröſste ist gleich $A_1 B_1$, der folgende gleich $A_2 B_2$, der dritte gleich $A_3 B_3$ u. s. w. Es handelt sich also um die Radien

$$r = \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \ldots$$

denen die Potentialwerte

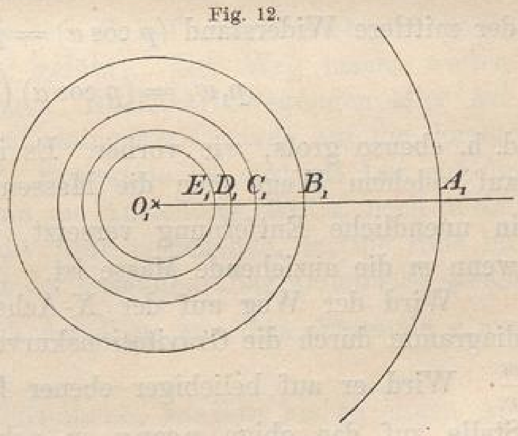
$$V = \frac{m}{r} = 1, 2, 3, 4 \cdots$$

Fig. 11.



entsprechen, so daſs die Potentialdifferenzen von Kreis zu Kreis konstant gleich 1 sind. Es kostet die Arbeit 1 um die Masse 1 von A aus ins Unendliche zu bringen, die Arbeit 1_1 die Masse 1 von B nach A zu bringen, ebenso viel Arbeit ist nötig, sie von C nach B zu bringen u. s. w.

Fig. 12.



In Figur 12 ist dasselbe für eine halb so groſse Masse m_1 in O_1 durchgeführt, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, . . . entsprechen den Radien

$$r = \frac{m_1}{1}, \frac{m_1}{2}, \frac{m_1}{3}, \frac{m_1}{4}, \ldots$$

was die Potentialwerte $V_1 = \frac{m_1}{r_1} = 1, 2, 3, 4, \ldots$ giebt.

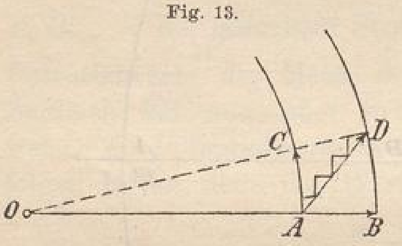
Setzt man in einer weiteren Figur $O_1 A_1 = 1$, so erhält man das Diagramm für die Masse 1.

Am zweckmäſsigsten ist es, die Quadratseite OA_1 der Figur 10 gleich einem Centimeter zu machen, was den Einheiten des Centimeter-, Gramm-, Sekunden-Systems entsprechen würde.

Solche Diagramme werden später bei den Mehrpunktproblemen zu wichtiger Anwendung gelangen.

21) Arbeit bei beliebigen Wegen im Raume. Um die Masse 1 von A nach B zu schaffen, ist die Arbeit

Fig. 13.



$$\frac{m}{r} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

nötig. Um sie von B nach D zu schaffen, ist die Arbeit Null nötig. Ebenso ist von A nach C die Arbeit Null, von C nach D die Arbeit

$$m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

nötig. Die kleinen Wege ABD und ACD erfordern also dieselbe Arbeit. Ebenso viel Arbeit erfordert der Weg AD, den man in beliebig viele Wege der vorigen Art zerlegen kann. Allerdings ist $AD > AB$, dafür ist aber in AD nur die durch Projektion entstehende Komponente des Widerstands zu überwinden. Ist der kleine Weg $AB = w$, der mittlere Widerstand gleich p, so ist die Arbeit gleich pw. Ist Winkel $BAD = \alpha$, so ist der kleine Weg

$$AD = \frac{w}{\cos\alpha} = w_1,$$

der mittlere Widerstand $(p \cos\alpha) = p_1$, die Arbeit also

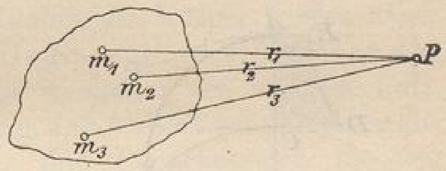
$$p_1 w_1 = (p \cos\alpha)\left(\frac{w}{\cos\alpha}\right) = pw,$$

d. h. ebenso groſs, wie vorher. Es ist also vollständig gleichgültig, auf welchem Wege man die Masseneinheit aus einer Entfernung r in unendliche Entfernung versetzt, stets ist die Arbeit gleich $\frac{m}{r}$, wenn m die anziehende Masse ist.

Wird der Weg auf der X-Achse gemacht, so ist das Arbeitsdiagramm durch die Gravitationskurve dargestellt und hat den Inhalt $\frac{m}{r}$. Wird er auf beliebiger ebener Kurve gemacht, wobei an jeder Stelle auf das obige $p \cos\alpha$ zu achten ist, so kann man in den Kurvenpunkten entsprechende Lote auf die Ebene aufsetzen. Das Arbeitsdiagramm hat dann wieder den Inhalt $\frac{m}{r}$, nur muſs, wenn die Bewegung stellenweise rückläufig ist, das Widerstandslot als negativ nach unten gerichtet sein. Die Fläche ist an solchen Stellen ebenfalls als negativ aufzufassen.

Bemerkung. Aus dieser Unabhängigkeit von der Wegrichtung läfst sich ein sehr wichtiger Schlufs ziehen. Befindet sich die von mehreren z. B. von drei Massen m_1, m_2, m_3 angezogene Masseneinheit in P_1 und bewegt man die letztere auf beliebigem ebenen Wege bis in unendliche Entfernung, so ist der Arbeitsbedarf $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m^3}{r_3}$. Die drei Diagramme sind nämlich einfach zu addieren, indem die zu jeder Stelle gehörigen Lote $p_1 \cos \alpha_1$, $p_2 \cos \alpha_2$ und $p_3 \cos \alpha_3$ vereinigt werden. Während also bei der Addition von Kräften nach dem Parallelogramm die Richtungen eine Rolle spielen, ist dies bei der Vereinigung von Potentialwerten nicht der Fall. Bei der aufserordentlichen Wichtigkeit dieses Satzes soll gelegentlich der Behandlung der Mehrpunktprobleme von anderem Gesichtspunkte aus ein weiterer Beweis des Satzes $V = V_1 + V_2 + V_3$, nach dem die Potentiale einfach algebraisch zu summieren sind, gegeben werden. Auf die darin liegenden Rechnungsersparnisse sei schon an dieser Stelle hingedeutet. Insbesondere darf man an Stelle des Diagramms einer beliebigen Bewegung stets das der entsprechenden radialen Bewegung setzen, was für das sogenannte Energieprinzip welches oben nur in Bezug auf die Radialbewegung besprochen wurde, von Bedeutung ist.

Fig. 14.



Man denke sich die freie Masse z. B. auf einem beliebigen ebenen Wege in unendliche Entfernung geführt. Der Weg mache wellenförmige Schwankungen, Windungen, Rückkehrbewegungen aller Art. Die an jeder Stelle wirkende Anziehungskraft werde auf die dortige Tangente der Bahn projiziert, die Projektion ist dort als Lot auf die Ebene zu setzen, nach oben, wenn die Anziehung positiv, nach unten, wenn sie negativ ist. Ist m_1 die feste anziehende, m_2 die freie bewegliche Masse, so ist der Inhalt der gesamten Diagrammfläche gleich $k\frac{m_1 m_2}{r}$, also ebenso grofs, als ob der Weg von dem Abstande r aus auf geraden Linien erfolgt wäre.

Geht der Weg nicht ins Unendliche, sondern bis zu einem Abstande r_1, so ist die Diagrammfläche gleich $km_1 m_2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right]$, möge der Weg noch so kompliziert gewählt sein.

Darin, dafs man imstande ist, den Inhalt so willkürlich begrenzter Diagramme sofort anzugeben, liegt ein Vorteil der Einführung des

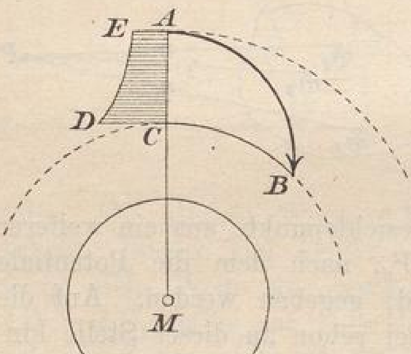
Potentialbegriffs, der nicht hoch genug angeschlagen werden kann. Von diesem Gesichtspunkte aus scheint sich Green zur Schöpfung der Potentialtheorie entschlossen zu haben.

[Vgl. Green: An essay on the application etc. Nottingham 1828 und Crell. Journal 39, 44, 47.]

Eine weiterer Vorteil wird sich später ergeben.

22) Erhaltung der Energie oder Arbeit. Die freie Masse m_2 habe in A eine beliebige Geschwindigkeit v_1 erhalten, sie bewege sich durch Anziehung der in M festgehaltenen Masse m_1 nach B, so dafs es sich zunächst um die anziehende Kraft $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ handelt. Die ursprüngliche Energie war $\frac{m_2 v_1^2}{2}$, sie geht, wenn der Körper nach B gelangt, über in $\frac{m_2 v_2^2}{2}$. Werden keine Nebenarbeiten, wie Reibungsüberwindung und dergl. geleistet, so mufs der Energieunterschied $\frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_2 v_1^2}{2}$ genau der geleisteten Arbeit entsprechen, die durch das Diagramm $ACDE$ veranschaulicht ist. Ihr Betrag ist gleich $k\, m_1\, m_2 \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$, d. h. gleich der Potentialdifferenz. Demnach ist

Fig. 15.



$$\frac{m_2}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = k m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

oder

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\, k m_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Die Bewegung erfolgt also derart, dafs die Energiedifferenz für den Anfang und das Ende jedes Weges gleich der entsprechenden Potentialdifferenz ist.

Setzt man ferner v_2 variabel gleich v und r_2 variabel gleich r, so folgt

$$\frac{m_2}{2} v^2 - \frac{k m_1 m_2}{r} = \frac{m_2}{2} v_1^2 - \frac{k m_1 m_2}{r_1} = C.$$

Rechts steht die konstante Anfangsdifferenz zwischen Energie und Potential, links stehen veränderliche Gröfsen. Trotzdem besteht Gleichheit beider Seiten. Folglich: Die Bewegung erfolgt so, dafs die Differenz zwischen Energie und Potential stets konstant bleibt. Also: $T - U = c$, wenn T die Energie, U das Potential bedeutet.

Die von der Anziehung geleistete Arbeit kommt als Energie zum Vorschein, welche diese Arbeit selbst wieder schaffen kann, z. B. als Hebungsarbeit, wenn die Bahn sich wieder nach aufsen lenkt. Bei dem Entfernen tritt also Verlangsamung ein.

Wird dieselbe Niveaufläche mehrfach passiert, so geschieht es stets mit derselben Geschwindigkeit.

Man bezeichnet $m_2 \frac{v^2}{2}$ als kinetische Energie. Entfernt sich der Körper, so setzt sich ein Teil davon über in potentielle Energie, die dem Diagramm $ACDE$ entspricht. Die potentielle Energie ist also aufgesammelte Hebungsarbeit. Kommt der Körper wieder näher an das Centrum, so setzt sich potentielle Energie in kinetische um.

In allen diesen Beziehungen liegt wiederum der wichtige Satz, den man den Satz von der Erhaltung der Arbeit nennt. (Energie, Wucht, auch wohl lebendige Kraft, sind Bezeichnungen für den Ausdruck $m \frac{v^2}{2}$.) Setzt man das Potential gleich $-\frac{m_1 m_2}{r}$, so geht der Satz in die gebräuchlichere Form $T + U = c$ über.

23) Ein kosmisches Beispiel. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne betrage rund 20 500 000 Meilen, die mittlere Geschwindigkeit 30 000 m. Wie grofs ist die Erdgeschwindigkeit in den verschiedenen Entfernungen von der Sonne?

Aus obiger Gleichung folgt

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2km_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)} = \sqrt{v_1^2 + \frac{2km_1(r_1 - r)}{rr_1}}.$$

Nun war für die Sonne in Nr. 7 gefunden $\frac{km_1}{\varrho^2} = 272$, also ist $km_1 = 272 \cdot \varrho^2 = 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2$, denn der Sonnenradius hat 95 000 Meilen Länge. Setzt man die Werte ein, so folgt

$$v = \sqrt{9 \cdot 10^8 + \frac{2 \cdot 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2\,(20\,500\,000 \cdot 7500 - r)}{20\,500\,000 \cdot 7500 \cdot r}}.$$

Für die Sonnennähe z. B. ist $r = \sim 20\,000\,000$ Meilen, also wird

$$v = \sqrt{9 \cdot 10^8 + \frac{2 \cdot 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2\,(20\,500\,000 - 20\,000\,000)\,7500}{20\,500\,000 \cdot 20\,000\,000 \cdot 7500^2}}.$$

Es folgt 30 750 m Geschwindigkeit. Man kann diesen besonderen Wert leicht mittels des Keplerschen Flächensatzes prüfen, nach dem die verschiedenen Geschwindigkeiten für gleiche Zeiträume gleiche Sektoren geben, so dafs die Geschwindigkeiten umgekehrt proportional dem vom Sonnenmittelpunkte auf die Tangente der Bahn (im Orte des Planeten) gefällten Lote sind. — Ebenso findet man die Geschwindigkeit für die Sonnenferne und für jede beliebige Stelle der Bahn.

Aus dieser Veränderlichkeit der Geschwindigkeiten und Entfernungen ergiebt sich, daſs einer vollen Umdrehung der Erde um ihre Achse (Sterntag) verschiedene Wege entsprechen, ferner ist klar, daſs auch gleiche Wege in der Sonnennähe stärker auf den Unterschied zwischen Stern- und Sonnentag einwirken, als in der Sonnenferne. Der Unterschied ist ein Maximum in der Sonnennähe, ein Minimum in der Sonnenferne. Die Sonnentage sind also länger in der Sonnennähe, als in der Sonnenferne. So ergiebt sich die Notwendigkeit, die Uhren von Tag zu Tag zu korrigieren, oder eine mittlere Zeit einzuführen. Dabei ist der Unterschied zwischen mittlerer und wahrer Zeit die sogenannte Zeitgleichung. Man denkt sich dabei im Laufe des Jahres neben der wirklichen Sonne eine hypothetisch angenommene mittlere Sonne am Himmel sich scheinbar bewegend. Durch Summierung der Unterschiede von Tag zu Tag steigt die Zeitdifferenz der Kulminationen beider Sonnen bis auf 17 Minuten, um dann wieder abzunehmen. (Vgl. Dr. Wislicenus: Astronomische Chronologie. Leipzig bei Teubner 1895.) Unter Sekunde im bürgerlichen Sinne hat man den 86 400ten Teil des mittleren Sonnentags zu verstehen. Die Definition der Zeiteinheit ist also nicht allzuleicht zu geben. Im Grunde hat sie nur eine vorübergehende Geltung, da die Dauer der Erdumdrehung seit Hipparch um etwa $\frac{1}{81}$ Sekunde zugenommen hat und auch die Dauer des Jahres nicht ohne Schwankungen ist.