Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

11) Erste Konstruktion der Kurve $y=1/x^2$

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

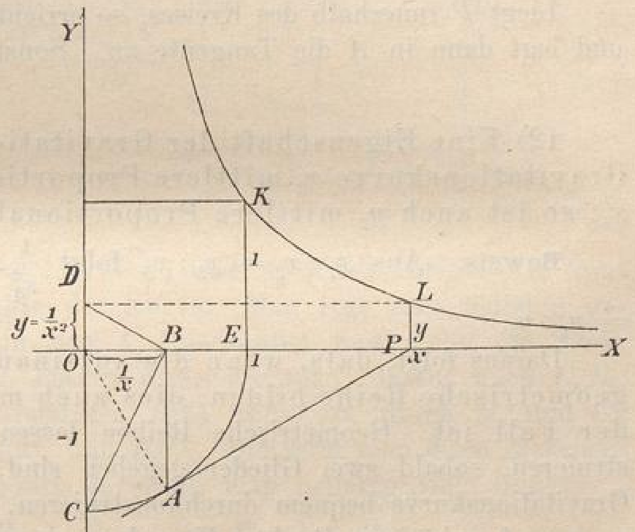
Kapitel II.

Die Gravitationskurve $y = \frac{1}{x^2}$ und der Potentialbegriff.

11) Erste Konstruktion der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$.

Angenommen im Punkte O befinde sich die dort festgehaltene Masse 1, auf der X-Achse befinde sich frei beweglich ebenfalls die Masse 1, und diese werde von der ersteren nach dem Newtonschen Gesetz angezogen, dann ist die Anziehung $p = k\frac{1 \cdot 1}{x^2} = \frac{k}{x^2}$. Um jedoch ganz einfache Formeln zu erhalten, wollen wir die Gravitationskonstante $k = 1$ setzen, so dafs $p = \frac{1}{x^2}$ wird. Um ein Bild von dem Verhalten in verschiedenen Lagen zu bekommen, errichte man an jeder Stelle der X-Achse ein Lot $y = \frac{1}{x^2}$, dann liegen die Endpunkte der Lote auf einer Kurve, deren Gleichung durch die letzte Beziehung gegeben ist. Ihr Lauf soll nur im ersten Quadranten verfolgt werden.

Fig. 3.



Man erhält einigen Überblick schon dadurch, dafs man an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ die Lote

$$y_1 = \frac{1}{1^2} = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad y_3 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \quad y_4 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}, \ldots$$

errichtet, an den Stellen $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ die Lote 4, 9, 16, 25, ... Auch beliebig viele Zwischenwerte kann man konstruieren, und leicht erkennt man, dafs für $x = \infty$ der Wert von $y = 0$, für $x = 0$ dagegen $y = \infty$ wird, so dafs die Koordinatenachsen Asymptoten der Kurve werden.

Man findet für jeden beliebigen Punkt P der X-Achse vom Abstand $OP = x$ die Ordinate bequem folgendermafsen: Man schlage um O den Einheitskreis, lege an ihn von P aus die Tangente PA, fälle vom Berührungspunkte A aus auf die X-Achse das Lot AB (so dafs nach Pythagoras $OB \cdot OP = OA^2$ oder $OB \cdot x = 1$, also $OB = \frac{1}{x}$ ist), verbinde B mit C und errichte auf CB im Punkte B ein Lot bis zum Schnittpunkte D mit der Y-Achse, dann ist $CD = y$ die gesuchte Ordinate. Vollendung des Rechtecks $PODL$ giebt den zu P gehörigen Punkt L der Kurve.

Beweis. Es war $OB = \frac{1}{x}$. Nach bekanntem Satze ist $OD : OB = OB : OC$ oder $OD : \frac{1}{x} = \frac{1}{x} : 1$, also ist $OD = \frac{1}{x^2}$, und ebenso $PL = \frac{1}{x^2}$. L ist also ein Punkt der gesuchten Kurve.

Liegt P innerhalb des Kreises, so errichtet man erst das Lot PA und legt dann in A die Tangente an. Sonst ändert sich nichts.

12) Eine Eigenschaft der Gravitationskurve. Ist bei der Gravitationskurve x_2 mittlere Proportionale zwischen x_1 und x_3, so ist auch y_2 mittlere Proportionale zwischen y_1 und y_3.

Beweis. Aus $x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ folgt $\frac{1}{x_1^2} : \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{x_2^2} : \frac{1}{x_3^2}$ oder $y_1 : y_2 = y_2 : y_3$.

Daraus folgt, dafs, wenn die aufeinander folgenden x eine geometrische Reihe bilden, dies auch mit dem zugehörigen y der Fall ist. Geometrische Reihen lassen sich aber leicht konstruieren, sobald zwei Glieder gegeben sind, folglich läfst sich die Gravitationskurve bequem durchkonstruieren, sobald man neben dem zu $x = 1$ gehörigen Punkte K noch einen zweiten, L, kennt.

Die obige Eigenschaft hat übrigens die vorliegende Kurve mit allen Kurven von der Gleichung $y = x^p$ gemein, d. h. mit allen Parabeln höherer Ordnung, zu denen auch die gleichseitige Hyperbel als Isotherme oder Mariottesche Kurve, die Adiabate für Luft und Wasserdampf und andere gehören. (Vgl. Method. Lehrbuch der Math. III, von Seite 162 ab.)

Die nachstehende Konstruktion gilt also von allen diesen Kurven