Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

12) Eine Eigenschaft der Gravitationskurve

errichtet, an den Stellen $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ die Lote 4, 9, 16, 25, ... Auch beliebig viele Zwischenwerte kann man konstruieren, und leicht erkennt man, dafs für $x = \infty$ der Wert von $y = 0$, für $x = 0$ dagegen $y = \infty$ wird, so dafs die Koordinatenachsen Asymptoten der Kurve werden.

Man findet für jeden beliebigen Punkt P der X-Achse vom Abstand $OP = x$ die Ordinate bequem folgendermafsen: Man schlage um O den Einheitskreis, lege an ihn von P aus die Tangente PA, fälle vom Berührungspunkte A aus auf die X-Achse das Lot AB (so dafs nach Pythagoras $OB \cdot OP = OA^2$ oder $OB \cdot x = 1$, also $OB = \frac{1}{x}$ ist), verbinde B mit C und errichte auf CB im Punkte B ein Lot bis zum Schnittpunkte D mit der Y-Achse, dann ist $CD = y$ die gesuchte Ordinate. Vollendung des Rechtecks $PODL$ giebt den zu P gehörigen Punkt L der Kurve.

Beweis. Es war $OB = \frac{1}{x}$. Nach bekanntem Satze ist $OD : OB = OB : OC$ oder $OD : \frac{1}{x} = \frac{1}{x} : 1$, also ist $OD = \frac{1}{x^2}$, und ebenso $PL = \frac{1}{x^2}$. L ist also ein Punkt der gesuchten Kurve.

Liegt P innerhalb des Kreises, so errichtet man erst das Lot PA und legt dann in A die Tangente an. Sonst ändert sich nichts.

12) Eine Eigenschaft der Gravitationskurve. Ist bei der Gravitationskurve x_2 mittlere Proportionale zwischen x_1 und x_3, so ist auch y_2 mittlere Proportionale zwischen y_1 und y_3.

Beweis. Aus $x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ folgt $\frac{1}{x_1^2} : \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{x_2^2} : \frac{1}{x_3^2}$ oder $y_1 : y_2 = y_2 : y_3$.

Daraus folgt, dafs, wenn die aufeinander folgenden x eine geometrische Reihe bilden, dies auch mit dem zugehörigen y der Fall ist. Geometrische Reihen lassen sich aber leicht konstruieren, sobald zwei Glieder gegeben sind, folglich läfst sich die Gravitationskurve bequem durchkonstruieren, sobald man neben dem zu $x = 1$ gehörigen Punkte K noch einen zweiten, L, kennt.

Die obige Eigenschaft hat übrigens die vorliegende Kurve mit allen Kurven von der Gleichung $y = x^p$ gemein, d. h. mit allen Parabeln höherer Ordnung, zu denen auch die gleichseitige Hyperbel als Isotherme oder Mariottesche Kurve, die Adiabate für Luft und Wasserdampf und andere gehören. (Vgl. Method. Lehrbuch der Math. III, von Seite 162 ab.)

Die nachstehende Konstruktion gilt also von allen diesen Kurven