Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

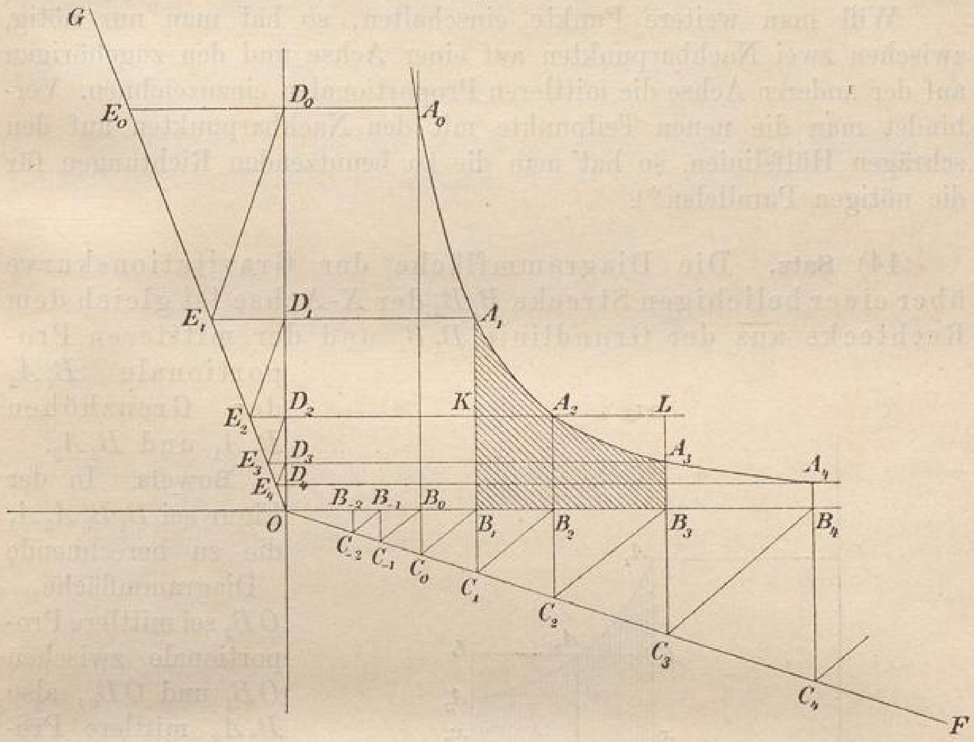
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

13) Zweite Konstruktion der Gravitationskurve

13) **Aufgabe.** (Zweite Konstruktion der Kurve.) Aus zwei Punkten A_1 und A_2 der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ (allgemeiner $y = x^p$) beliebig viele ihrer Punkte zu konstruieren.

Fig. 4.



Auflösung. A_1 ($x = 1$, $y = 1$) und A_2 (nach voriger Art konstruiert) seien zwei Punkte der Kurve. Man lege eine beliebig gerichtete Hilfslinie OF in den 4. Quadranten und ziehe die Senkrechten $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ bis zu dieser Geraden, darauf noch C_1B_2. Legt man Parallele zur letzteren B_1C_0 und C_2B_3 durch B_1 und C_2, und darauf Senkrechte C_0B_0 und B_3C_3, und setzt man diese Zickzack-Konstruktion beiderseits fort, so erhält man beliebig viele Punkte

$$\ldots, B_{-3}, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$$

auf der X-Achse, deren Abstände eine geometrische Reihe bilden.

Ebenso lege man eine beliebig gerichtete Gerade OG in den 2. Quadranten, ziehe von A_1 und A_2 aus die Horizontalen $A_1D_1E_1$ und $A_2D_2E_2$, verbinde D_1 mit E_1 und mache dieselbe Konstruktion wie vorher, so dafs man auf der Y-Achse Punkte

$$\ldots, D_{-3}, D_{-2}, D_{-1}, D_0, D_1, D_2, D_3 \ldots$$

erhält.

Die Senkrechte und Wagerechte durch je zwei gleichzahlige der auf beiden Koordinatenachsen gefundenen Punkte geben je einen Schnittpunkt, und so erhält man beliebig viele Punkte

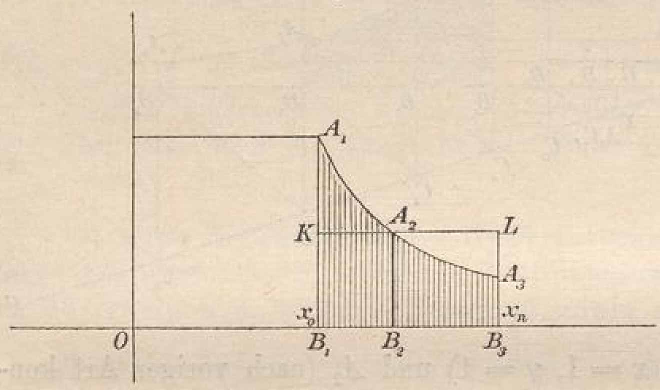
$$\ldots, A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$$

der Kurve.

Will man weitere Punkte einschalten, so hat man nur nötig, zwischen zwei Nachbarpunkten auf einer Achse und den zugehörigen auf der anderen Achse die mittleren Proportionalen einzuzeichnen. Verbindet man die neuen Teilpunkte mit den Nachbarpunkten auf den schrägen Hülfslinien, so hat man die zu benutzenden Richtungen für die nötigen Parallelen*).

14) **Satz.** Die Diagrammfläche der Gravitationskurve über einer beliebigen Strecke $B_1 B_3$ der X-Achse ist gleich dem Rechtecke aus der Grundlinie $B_1 B_3$ und der mittleren Proportionale $B_2 A_2$ der Grenzhöhen $B_1 A_1$ und $B_3 A_3$.

Fig. 5.



Beweis. In der Figur sei $B_1 B_3 A_3 A_1$ die zu berechnende Diagrammfläche, OB_2 sei mittlere Proportionale zwischen OB_1 und OB_3, also $B_2 A_2$ mittlere Proportionale zwischen $B_1 A_1$ und $B_3 A_3$. Man denke sich $B_1 B_3$ in zahlreiche gleiche Teile eingeteilt und durch entsprechende Lote die Fläche in senkrechte Streifen zerlegt. Die Teilpunkte auf der X-Achse seien der Reihe nach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, die zugehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Multipliziert man die Grundlinie jedes Streifens mit seiner Anfangshöhe und bildet man die Summe der Produkte, so erhält man bei endlicher Anzahl der Streifen zu Grofses, aber für $n = \infty$ den richtigen Inhalt. Wählt man die Endhöhen, so erhält man zunächst zu Kleines,

*) Diese Art des Konstruierens ist in technischen Kreisen sehr beliebt, da nur Verschiebung des Winkelhakens auf der Reifsschiene erforderlich ist. Sie gilt auch für die Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel und der adiabatischen Kurven. Bildet man auf der einen Achse die Punkte der geometrischen Reihe, trägt man aber auf der andern Achse gleiche Abstände ab, so erhält man eine logarithmische Linie.