Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

15) Einfachste Konstruktion des Inhalts der Diagrammflächen

aber für $n=\infty$ das Richtige. Also mufs man erst recht für $n=\infty$ Richtiges erhalten, wenn man irgend welchen Mittelwert zwischen Anfangs- und Grenzhöhe als Höhe jedes Streifens wählt, z. B. das arithmetische Mittel, oder, was besondere Einfachheit giebt, die mittlere Proportionale. Für den ersten Streifen wird bei Anwendung der letzteren die Höhe gleich $\sqrt{y_0 y_1}$, also sein Inhalt gleich

$$(x_1-x_0)\sqrt{y_0y_1}=(x_1-x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{1}{x_1^2}}=(x_1-x_0)\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_1}.$$

Bildet man ebenso den Inhalt für jeden folgenden Streifen, so erhält man als Summe der Inhalte

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}}=\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_1}\right)+\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n}\right).$$

Hier hebt sich mit Ausnahme von $\frac{1}{x_0}$ und $-\frac{1}{x_n}$ alles weg, so dafs man erhält

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}.$$

Für unendlich grofse Zahl der Streifen ist dies absolut richtig. Aber für jede beliebige Anzahl kommt dasselbe heraus.

Dasselbe erhält man aber auch, wenn man die Grundlinie x_n-x_0 mit $\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{x_n}$ multipliziert, denn $(x_n-x_0)\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}$. Also ist

$$\overset{x_n}{\underset{x_0}{F}}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n}=(x_n-x_0)\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{x_n}=(x_n-x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{1}{x_n^2}}$$
$$=(x_n-x_0)\sqrt{\frac{1}{y_0}\cdot\frac{1}{y_n}}.$$

$\sqrt{\frac{1}{y_0}\cdot\frac{1}{y_n}}$ ist aber die mittlere Proportionale der Grenzhöhe, also ist der Satz als richtig bewiesen. Zugleich aber ist gezeigt, dafs der Inhalt auch gleich dem Produkte aus der Längeneinheit und dem Unterschiede der reziproken Werte der Anfangs- und End-Abscisse ist.

Reicht das Diagramm von x_0 bis $x=+\infty$, so erhält man als Fläche

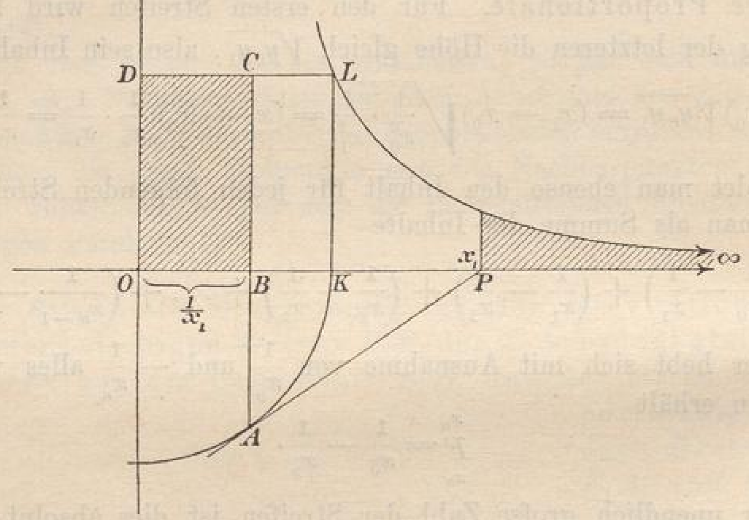
$$\overset{x=\infty}{\underset{x_0}{F}}=\frac{1}{x_0}-\frac{1}{\infty}=\frac{1}{x_0}-0=\frac{1}{x_0}.$$

Also: Die Diagrammfläche von x_0 bis ∞ ist gleich dem Rechtecke aus der Längeneinheit und dem umgekehrten Werte von x_0.

15) Einfachste Konstruktion des Inhalts der Diagrammflächen.

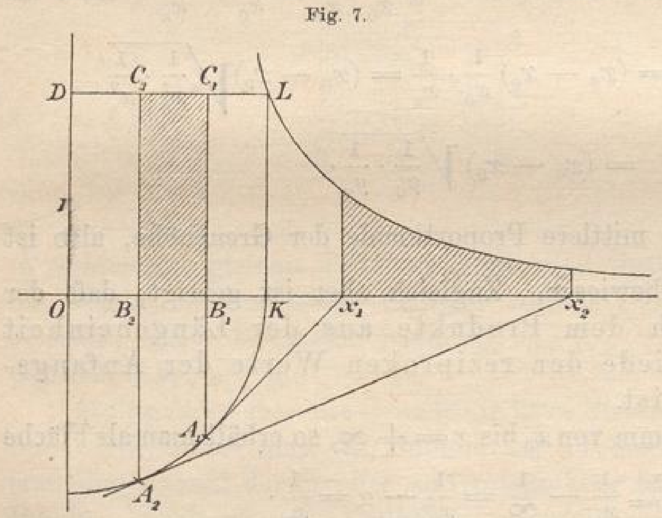
a) Um die Fläche des von x_1 bis ∞ reichenden Diagramms zu konstruieren, ziehe man von $P\,(OP = x_1)$ aus an den um O geschlagenen

Fig. 6.



Einheitskreis die Tangente PA und lege durch den Berührungspunkt A die Senkrechte ABC. Diese schneidet vom Quadrate $OKLD$ über der Einheitsstrecke OK das Rechteck $OBCD$ ab. Der Inhalt des letzteren ist, da nach dem Früheren $OB = \frac{1}{x_1}$ ist, gleich $\frac{1}{x_1} \cdot 1$ und damit gleich der Fläche des Diagramms. Ist $x_1 = 1$, so ist das Diagramm gleich 1. Ist $x_1 < 1$, so ist erst das Lot, dann die Tangente zu ziehen, und das Rechteck wird gröfser als die Flächeneinheit. Ist $x_1 = o$, so ist es unendlich grofs.

Fig. 7.

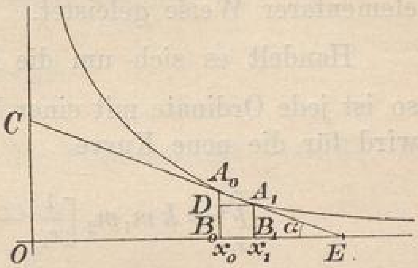


Ist die Einheit nicht gegeben, so findet man sie durch Halbierung des rechten Winkels BOD. Die Winkelhalbierende schneidet in L.

b) Um die Diagrammfläche $P_1 P_2 Q_2 Q_1$ graphisch darzustellen, ziehe man die Tangenten P_1A_1 und P_2A_2. Die von den Berührungspunkten aus gezogenen Senkrechten geben im Einheitsquadrate das Rechteck $B_1C_1C_2B_2$, welches den Inhalt des Diagramms angiebt. Denn

$$OB_1C_1D - OB_2C_2D = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}.$$

Fig. 8.



16) **Aufgabe.** Die Tangenten der Gravitationskurve zu konstruieren.

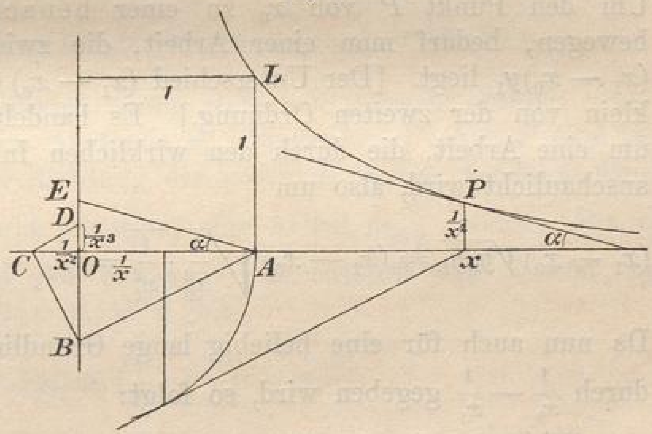
Auflösung. Man denke sich zwei benachbarte Punkte A_0 und A_1 der Kurve verbunden. Die Verbindungslinie gebe auf den Koordinatenachsen die Schnittpunkte C und E. Sind die Abscissen x_0 und x_1, die Ordinaten y_0 und y_1, und setzt man $\sphericalangle\, OEC = \alpha$, so ist

$$\tan\alpha = \frac{y_0 - y_1}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_1^2}}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_0^2 x_1^2 (x_1 - x_0)} = \frac{(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)}{x_0^2 x_1^2 (x_1 - x_0)} = \frac{x_1 + x_0}{x_0^2 x_1^2}.$$

Läfst man nun die Punkte x_0 und x_1 so nahe aneinander rücken, dafs man $x_1 = x_0$ setzen kann, so wird $\tan\alpha = \frac{2\,x_0}{x_0^4} = \frac{2}{x_0^3}$.

Dies giebt folgende Tangentenkonstruktion für einen Punkt P mit der Abscisse x. Man mache auf der Y-Achse $BO = \frac{1}{x}$, ziehe AB $(OA = 1)$, errichte auf AB in B ein Lot bis zum Schnitte C mit der X-Achse, errichte auf BC in C ein Lot bis zum Schnitte D mit der Y-Achse, mache $OE = 2\,OD$ und ziehe EA. Die durch P gelegte Parallele zu EA giebt die Tangente.

Fig. 9.



Beweis. $OB = \frac{1}{x}$, folglich $OC = \frac{1}{x^2}$, folglich $OD = \frac{1}{x^3}$, folglich $OE = \frac{2}{x^3}$, folglich $\tan\alpha = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{x^3}$.