Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

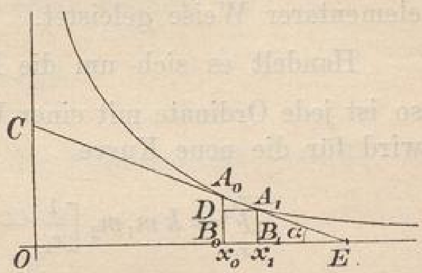
16) Tangentenkonstruktion für die Gravitationskurve

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

ziehe man die Tangenten $P_1 A_1$ und $P_2 A_2$. Die von den Berührungspunkten aus gezogenen Senkrechten geben im Einheitsquadrate das Rechteck $B_1 C_1 C_2 B_2$, welches den Inhalt des Diagramms angiebt. Denn

$$OB_1 C_1 D - OB_2 C_2 D = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}.$$

Fig. 8.



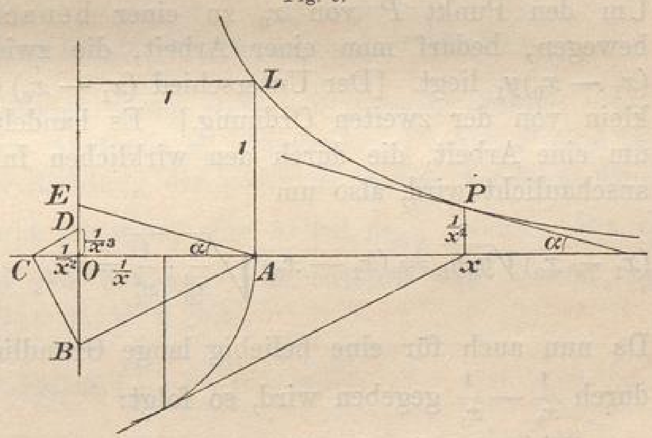
16) **Aufgabe.** Die Tangenten der Gravitationskurve zu konstruieren.

Auflösung. Man denke sich zwei benachbarte Punkte A_0 und A_1 der Kurve verbunden. Die Verbindungslinie gebe auf den Koordinatenachsen die Schnittpunkte C und E. Sind die Abscissen x_0 und x_1, die Ordinaten y_0 und y_1, und setzt man $\sphericalangle\, OEC = \alpha$, so ist

$$\tan\alpha = \frac{y_0 - y_1}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_1^2}}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_0^2 x_1^2 (x_1 - x_0)} = \frac{(x_1 + x_0)(x_1 - x_0)}{x_0^2 x_1^2 (x_1 - x_0)} = \frac{x_1 + x_0}{x_0^2 x_1^2}.$$

Läfst man nun die Punkte x_0 und x_1 so nahe aneinander rücken, dafs man $x_1 = x_0$ setzen kann, so wird $\tan\alpha = \frac{2x_0}{x_0^4} = \frac{2}{x_0^3}$.

Fig. 9.



Dies giebt folgende Tangentenkonstruktion für einen Punkt P mit der Abscisse x. Man mache auf der Y-Achse $BO = \frac{1}{x}$, ziehe AB $(OA = 1)$, errichte auf AB in B ein Lot bis zum Schnitte C mit der X-Achse, errichte auf BC in C ein Lot bis zum Schnitte D mit der Y-Achse, mache $OE = 2\,OD$ und ziehe EA. Die durch P gelegte Parallele zu EA giebt die Tangente.

Beweis. $OB = \frac{1}{x}$, folglich $OC = \frac{1}{x^2}$, folglich $OD = \frac{1}{x^3}$, folglich $OE = \frac{2}{x^3}$, folglich $\tan\alpha = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{x^3}$.

Beispiel. Für $x = 1$ erhält man $\tan\alpha = \frac{2}{1}\cdot$ Die Neigung in L ist also leicht zu konstruieren. Man macht auf der X-Achse $AV = +\frac{1}{2}$ und verbinde V mit L, was die Tangente giebt.

Damit ist alles Erforderliche für die Gravitationskurve in elementarer Weise geleistet.

Handelt es sich um die Kurve $y = k\frac{m_1 m_2}{x^2}$, oder um $y = k\frac{m_1}{x^2}$, so ist jede Ordinate mit einer Konstanten zu multiplizieren. Demnach wird für die neue Kurve

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right] \text{ bezw. } k m_1 \left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right].$$

Die Konstruktion der Kurve geschieht so, dafs man wie früher $\frac{1}{x^2}$ konstruiert, aber das km_1m_2-fache oder km_1-fache als Lot aufträgt. Bei der Tangentenkonstruktion wird $\tan\alpha = \frac{2km_1m_2}{x^2}$ bezw. $\frac{2km_1}{x^2}$. Beispiele werden unten gegeben.

17) Mechanische Bedeutung der Diagrammfläche. Befindet sich im Punkte O die festgehaltene Masse 1 und ist der Massenpunkt P auf der X-Achse freibeweglich und ebenfalls mit der Masse 1 belegt, so ist die Anziehung für jede Lage x von der Gröfse $y = \frac{1}{x^2}\cdot$ Um den Punkt P von x_0 zu einer benachbarten Stelle x_1 zu bewegen, bedarf man einer Arbeit, die zwischen $(x_1 - x_0)y_0$ und $(x_1 - x_0)y_1$ liegt. [Der Unterschied $(x_1 - x_0)(y_0 - y_1)$ ist unendlich klein von der zweiten Ordnung.] Es handelt sich in Wirklichkeit um eine Arbeit, die durch den wirklichen Inhalt des Streifens veranschaulicht wird, also um

$$(x_1 - x_0)\sqrt{y_0 y_1} = (x_1 - x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{1}{x_1^2}} = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}.$$

Da nun auch für eine beliebig lange Grundlinie $x_1 - x_0$ der Inhalt durch $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$ gegeben wird, so folgt:

Wird der Punkt P auf der X-Achse von x_0 bis x_1 geführt, so beansprucht dies die Arbeit $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$.

Ist dagegen in O die Masse m_1, in P die Masse m_2 angebracht, so ist, wenn aufserdem die Anziehungskonstante k berücksichtigt wird die Arbeit $A = km_1m_2\left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right]$.