Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

17) Mechanische Bedeutung der Diagrammfläche

Beispiel. Für $x = 1$ erhält man $\tan\alpha = \frac{2}{1}\cdot$ Die Neigung in L ist also leicht zu konstruieren. Man macht auf der X-Achse $AV = +\frac{1}{2}$ und verbinde V mit L, was die Tangente giebt.

Damit ist alles Erforderliche für die Gravitationskurve in elementarer Weise geleistet.

Handelt es sich um die Kurve $y = k\frac{m_1 m_2}{x^2}$, oder um $y = k\frac{m_1}{x^2}$, so ist jede Ordinate mit einer Konstanten zu multiplizieren. Demnach wird für die neue Kurve

$$\overset{x_2}{\underset{x_1}{F}} = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right] \text{ bezw. } k m_1 \left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right].$$

Die Konstruktion der Kurve geschieht so, dafs man wie früher $\frac{1}{x^2}$ konstruiert, aber das km_1m_2-fache oder km_1-fache als Lot aufträgt. Bei der Tangentenkonstruktion wird $\tan\alpha = \frac{2km_1m_2}{x^2}$ bezw. $\frac{2km_1}{x^2}$. Beispiele werden unten gegeben.

17) Mechanische Bedeutung der Diagrammfläche. Befindet sich im Punkte O die festgehaltene Masse 1 und ist der Massenpunkt P auf der X-Achse freibeweglich und ebenfalls mit der Masse 1 belegt, so ist die Anziehung für jede Lage x von der Gröfse $y = \frac{1}{x^2}\cdot$ Um den Punkt P von x_0 zu einer benachbarten Stelle x_1 zu bewegen, bedarf man einer Arbeit, die zwischen $(x_1 - x_0)y_0$ und $(x_1 - x_0)y_1$ liegt. [Der Unterschied $(x_1 - x_0)(y_0 - y_1)$ ist unendlich klein von der zweiten Ordnung.] Es handelt sich in Wirklichkeit um eine Arbeit, die durch den wirklichen Inhalt des Streifens veranschaulicht wird, also um

$$(x_1 - x_0)\sqrt{y_0 y_1} = (x_1 - x_0)\sqrt{\frac{1}{x_0^2}\cdot\frac{1}{x_1^2}} = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0}\cdot\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}.$$

Da nun auch für eine beliebig lange Grundlinie $x_1 - x_0$ der Inhalt durch $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$ gegeben wird, so folgt:

Wird der Punkt P auf der X-Achse von x_0 bis x_1 geführt, so beansprucht dies die Arbeit $\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$.

Ist dagegen in O die Masse m_1, in P die Masse m_2 angebracht, so ist, wenn aufserdem die Anziehungskonstante k berücksichtigt wird die Arbeit $A = km_1m_2\left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right]$.

Sind wiederum x_0 und x_1 benachbarte Werte, so entspricht dem kleinen Wege $w = x_1 - x_0$ eine Arbeit

$$pw = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) = (x_1 - x_0)\frac{1}{x_0 x_1},$$

oder, wenn x_0 und x_1 gleich gesetzt werden können,

$$(x_1 - x_0)\frac{1}{x_0^2} = pw.$$

Setzt man den Potentialwert $\frac{1}{x_0} = V_0$, den Potentialwert $\frac{1}{x_1} = V_1$, so folgt als Arbeit für diese kleine Bewegung

$$pw = V_0 - V_1,$$

oder Kraft mal Kraftweg = Potentialdifferenz.

Daraus aber folgt

$$p = \frac{V_0 - V_1}{w},$$

d. h. $\quad$ Kraft $= \frac{\text{Potentialdifferenz}}{\text{Weg}} =$ Potentialgefälle $= G$.

Berücksichtigt man noch m_2 und die Anziehungskonstante k, so ist die Kraft nicht gleich, aber proportional dem Potentialgefälle d. h.

$$p = km_2 \frac{V_0 - V_1}{w} = km_2 G = km_1 m_2 \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_0} = km_1 m_2 \frac{1}{r_0 r_1}.$$

Von diesem Satze wird häufig Gebrauch gemacht werden.

Giebt man dem im Abstande x_1 befindlichen Punkte P eine Geschwindigkeit v in der Richtung der positiven reellen Achse, so kann er infolge seiner Wucht (Energie) eine Arbeit $m_2 \frac{v^2}{2}$ leisten. Bis zu welcher Stelle wird er sich bewegen? Er entfernt sich so weit, bis seine Energie aufgezehrt ist, d. h. bis

$$km_1 m_2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right) = m_2 \frac{v^2}{2}$$

ist, oder bis

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x} = \frac{v^2}{2km_1}$$

ist, also bis zum Abstande

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x_1} - \frac{v^2}{2km_1}} = \frac{2kx_1 m_1}{2km_1 - x_1 v^2}.$$

Setzt man den Inhalt des Diagramms gleich A, so bewegt sich der Punkt soweit, bis

$$A = m_2 \frac{v^2}{2}$$

ist.

Läfst man den Punkt P an einer Stelle x_1 los, und fällt er infolge der Anziehung in der Richtung nach O, so erreicht er an der Stelle x eine Geschwindigkeit, die sich aus

$$\frac{m_2 v^2}{2} = A = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}\right]$$

ergiebt. Es wird also

$$v = \sqrt{\frac{2A}{m_2}},$$

wo A das Arbeitsdiagramm ist.

Wird der Punkt in unendlicher Entfernung losgelassen, so handelt es sich um

$$\frac{m_2 v^2}{2} = k m_1 m_2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right] = \frac{k m_1 m_2}{x},$$

seine Geschwindigkeit an der Stelle x ist also

$$v = \sqrt{\frac{2 k m_1}{x}} = \sqrt{2 k m_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Das Geschwindigkeitsdiagramm, welches entsteht, wenn man für jeden Punkt x die Geschwindigkeit, mit der er passiert wird, als Lot errichtet, ist also eine Parabel von der Ordnung $-\frac{1}{2}$. Für $2 k m_1 = 1$ läfst sich die Kurve am einfachsten konstruieren, denn $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist mittlere Proportionale zwischen 1 und $\frac{1}{x}$.

18) Der Potentialbegriff. Die Arbeit, die nötig ist, um den Punkt P aus der Lage x in unendliche Entfernung zu bringen, bezeichnet man als **das Potential** des in O befindlichen Punktes m_1 in Bezug auf den Massenpunkt m_2 für die Lage x. Das Potential wird also durch das bis ins Unendliche reichende Arbeitsdiagramm graphisch dargestellt. Es ist gleich $\frac{k m_1 m_2}{x}$.

Andere verstehen unter Potential den Ausdruck $-\frac{k m_1 m_2}{x}$, also die Arbeit, die vom anziehenden Punkte an dem beweglichen geleistet wird, um ihn aus unendlicher Entfernung in die Lage x zu bringen.