Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

20) Diagramm für verschiedene Massen

lineal, welches von den Schenkeln eines rechten Winkels und von der gleichseitigen Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ begrenzt wird, wobei $OP = 1$ ein für allemal bestimmt angenommen ist. Ist nun z. B. $OC_1 = \frac{m}{1}$, so giebt die Horizontale $C_1 B_1$ die Ordinate

$$A_1 B_1 = \frac{m}{1}.$$

Trägt man $C_1 B_1$ von O aus beliebig oft auf der X-Achse ab, was $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ giebt, so hat man in den Ordinaten $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, \ldots$ die gesuchten Strecken $\frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \cdots$ Dies sind z. B. die Potentialwerte der Masse m für die Entfernungen $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Zugleich hat man aber in diesen Linien diejenigen Entfernungen, welche die Potentialwerte in einfacher arithmetischer Reihe aufeinander folgen lassen, denn der Wertfolge des Potentials

$$\frac{m}{r} = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

entspricht für r die Wertfolge

$$r = \frac{m}{0}, \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \ldots,$$

was der obigen Ordinatenreihe entspricht.

Will man die Genauigkeit der Konstruktionen dadurch erhöhen, dafs man das Intervall der Potentialwerte halb so grofs macht, d. h. will man die Reihe

$$\frac{m}{r} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \ldots$$

zu Grunde legen, so hat man als Entfernungen zu wählen

$$r = \frac{2m}{0}, \frac{2m}{1}, \frac{2m}{2}, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{4}, \ldots$$

wobei $\frac{2m}{2} = \frac{m}{1} = A_1 B_1$ ist.

Man erhält diese Radien, indem man die Lote in den Halbierungspunkten der Strecken OA_1, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ u. s. w. einschaltet.

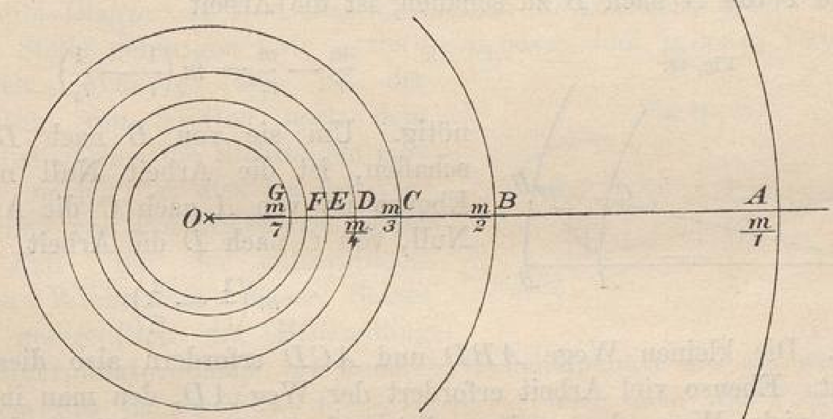
20) Diagramme für verschiedene Massen. In Figur 11 sind um O, wo sich die Masse m befindet, koncentrische Kreise geschlagen, an deren Stelle Kugeln zu denken sind. Die Radien sind der Figur 10 entnommen, der gröfste ist gleich $A_1 B_1$, der folgende gleich $A_2 B_2$, der dritte gleich $A_3 B_3$ u. s. w. Es handelt sich also um die Radien

$$r = \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \ldots$$

denen die Potentialwerte

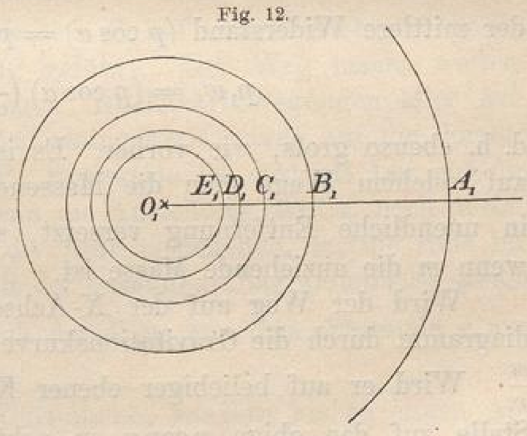
$$V = \frac{m}{r} = 1, 2, 3, 4 \cdots$$

Fig. 11.



entsprechen, so daſs die Potentialdifferenzen von Kreis zu Kreis konstant gleich 1 sind. Es kostet die Arbeit 1 um die Masse 1 von A aus ins Unendliche zu bringen, die Arbeit 1_1 die Masse 1 von B nach A zu bringen, ebenso viel Arbeit ist nötig, sie von C nach B zu bringen u. s. w.

Fig. 12.



In Figur 12 ist dasselbe für eine halb so groſse Masse m_1 in O_1 durchgeführt, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, ... entsprechen den Radien

$$r = \frac{m_1}{1}, \frac{m_1}{2}, \frac{m_1}{3}, \frac{m_1}{4}, \ldots$$

was die Potentialwerte $V_1 = \frac{m_1}{r_1} = 1, 2, 3, 4, \ldots$ giebt.

Setzt man in einer weiteren Figur $O_1 A_1 = 1$, so erhält man das Diagramm für die Masse 1.

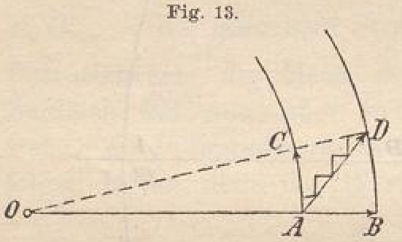
Am zweckmäfsigsten ist es, die Quadratseite OA_1 der Figur 10 gleich einem Centimeter zu machen, was den Einheiten des Centimeter-, Gramm-, Sekunden-Systems entsprechen würde.

Solche Diagramme werden später bei den Mehrpunktproblemen zu wichtiger Anwendung gelangen.

21) Arbeit bei beliebigen Wegen im Raume. Um die Masse 1 von A nach B zu schaffen, ist die Arbeit

$$\frac{m}{r} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Fig. 13.



nötig. Um sie von B nach D zu schaffen, ist die Arbeit Null nötig. Ebenso ist von A nach C die Arbeit Null, von C nach D die Arbeit

$$m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

nötig. Die kleinen Wege ABD und ACD erfordern also dieselbe Arbeit. Ebenso viel Arbeit erfordert der Weg AD, den man in beliebig viele Wege der vorigen Art zerlegen kann. Allerdings ist $AD > AB$, dafür ist aber in AD nur die durch Projektion entstehende Komponente des Widerstands zu überwinden. Ist der kleine Weg $AB = w$, der mittlere Widerstand gleich p, so ist die Arbeit gleich pw. Ist Winkel $BAD = \alpha$, so ist der kleine Weg

$$AD = \frac{w}{\cos\alpha} = w_1,$$

der mittlere Widerstand $(p\cos\alpha) = p_1$, die Arbeit also

$$p_1 w_1 = (p\cos\alpha)\left(\frac{w}{\cos\alpha}\right) = pw,$$

d. h. ebenso grofs, wie vorher. Es ist also vollständig gleichgültig, auf welchem Wege man die Masseneinheit aus einer Entfernung r in unendliche Entfernung versetzt, stets ist die Arbeit gleich $\frac{m}{r}$, wenn m die anziehende Masse ist.

Wird der Weg auf der X-Achse gemacht, so ist das Arbeitsdiagramm durch die Gravitationskurve dargestellt und hat den Inhalt $\frac{m}{r}$. Wird er auf beliebiger ebener Kurve gemacht, wobei an jeder Stelle auf das obige $p\cos\alpha$ zu achten ist, so kann man in den Kurvenpunkten entsprechende Lote auf die Ebene aufsetzen. Das Arbeitsdiagramm hat dann wieder den Inhalt $\frac{m}{r}$, nur mufs, wenn die Bewegung stellenweise rückläufig ist, das Widerstandslot als