Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

21) Arbeit bei beliebigen Wegen im Raume

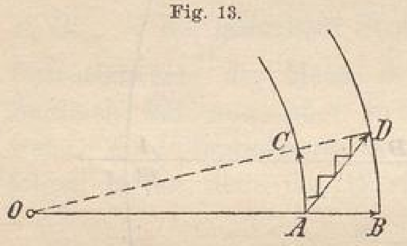
Am zweckmäfsigsten ist es, die Quadratseite OA_1 der Figur 10 gleich einem Centimeter zu machen, was den Einheiten des Centimeter-, Gramm-, Sekunden-Systems entsprechen würde.

Solche Diagramme werden später bei den Mehrpunktproblemen zu wichtiger Anwendung gelangen.

21) Arbeit bei beliebigen Wegen im Raume. Um die Masse 1 von A nach B zu schaffen, ist die Arbeit

$$\frac{m}{r} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Fig. 13.



nötig. Um sie von B nach D zu schaffen, ist die Arbeit Null nötig. Ebenso ist von A nach C die Arbeit Null, von C nach D die Arbeit

$$m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

nötig. Die kleinen Wege ABD und ACD erfordern also dieselbe Arbeit. Ebenso viel Arbeit erfordert der Weg AD, den man in beliebig viele Wege der vorigen Art zerlegen kann. Allerdings ist $AD > AB$, dafür ist aber in AD nur die durch Projektion entstehende Komponente des Widerstands zu überwinden. Ist der kleine Weg $AB = w$, der mittlere Widerstand gleich p, so ist die Arbeit gleich pw. Ist Winkel $BAD = \alpha$, so ist der kleine Weg

$$AD = \frac{w}{\cos\alpha} = w_1,$$

der mittlere Widerstand $(p\cos\alpha) = p_1$, die Arbeit also

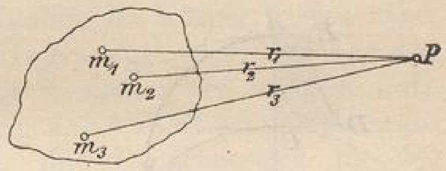
$$p_1 w_1 = (p\cos\alpha)\left(\frac{w}{\cos\alpha}\right) = pw,$$

d. h. ebenso grofs, wie vorher. Es ist also vollständig gleichgültig, auf welchem Wege man die Masseneinheit aus einer Entfernung r in unendliche Entfernung versetzt, stets ist die Arbeit gleich $\frac{m}{r}$, wenn m die anziehende Masse ist.

Wird der Weg auf der X-Achse gemacht, so ist das Arbeitsdiagramm durch die Gravitationskurve dargestellt und hat den Inhalt $\frac{m}{r}$. Wird er auf beliebiger ebener Kurve gemacht, wobei an jeder Stelle auf das obige $p\cos\alpha$ zu achten ist, so kann man in den Kurvenpunkten entsprechende Lote auf die Ebene aufsetzen. Das Arbeitsdiagramm hat dann wieder den Inhalt $\frac{m}{r}$, nur mufs, wenn die Bewegung stellenweise rückläufig ist, das Widerstandslot als negativ nach unten gerichtet sein. Die Fläche ist an solchen Stellen ebenfalls als negativ aufzufassen.

Bemerkung. Aus dieser Unabhängigkeit von der Wegrichtung läſst sich ein sehr wichtiger Schluſs ziehen. Befindet sich die von mehreren z. B. von drei Massen m_1, m_2, m_3 angezogene Masseneinheit in P_1 und bewegt man die letztere auf beliebigem ebenen Wege bis in unendliche Entfernung, so ist der Arbeitsbedarf $\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m^3}{r_3}$. Die drei Diagramme sind nämlich einfach zu addieren, indem die zu jeder Stelle gehörigen Lote $p_1 \cos \alpha_1$, $p_2 \cos \alpha_2$ und $p_3 \cos \alpha_3$ vereinigt werden. Während also bei der Addition von Kräften nach dem Parallelogramm die Richtungen eine Rolle spielen, ist dies bei der Vereinigung von Potentialwerten nicht der Fall. Bei der auſserordentlichen Wichtigkeit dieses Satzes soll gelegentlich der Behandlung der Mehrpunktprobleme von anderem Gesichtspunkte aus ein weiterer Beweis des Satzes $V = V_1 + V_2 + V_3$, nach dem die Potentiale einfach algebraisch zu summieren sind, gegeben werden. Auf die darin liegenden Rechnungsersparnisse sei schon an dieser Stelle hingedeutet. Insbesondere darf man an Stelle des Diagramms einer beliebigen Bewegung stets das der entsprechenden radialen Bewegung setzen, was für das sogenannte Energieprinzip welches oben nur in Bezug auf die Radialbewegung besprochen wurde, von Bedeutung ist.

Fig. 14.



Man denke sich die freie Masse z. B. auf einem beliebigen ebenen Wege in unendliche Entfernung geführt. Der Weg mache wellenförmige Schwankungen, Windungen, Rückkehrbewegungen aller Art. Die an jeder Stelle wirkende Anziehungskraft werde auf die dortige Tangente der Bahn projiziert, die Projektion ist dort als Lot auf die Ebene zu setzen, nach oben, wenn die Anziehung positiv, nach unten, wenn sie negativ ist. Ist m_1 die feste anziehende, m_2 die freie bewegliche Masse, so ist der Inhalt der gesamten Diagrammfläche gleich $k\frac{m_1 m_2}{r}$, also ebenso groſs, als ob der Weg von dem Abstande r aus auf geraden Linien erfolgt wäre.

Geht der Weg nicht ins Unendliche, sondern bis zu einem Abstande r_1, so ist die Diagrammfläche gleich $km_1 m_2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right]$, möge der Weg noch so kompliziert gewählt sein.

Darin, daſs man imstande ist, den Inhalt so willkürlich begrenzter Diagramme sofort anzugeben, liegt ein Vorteil der Einführung des

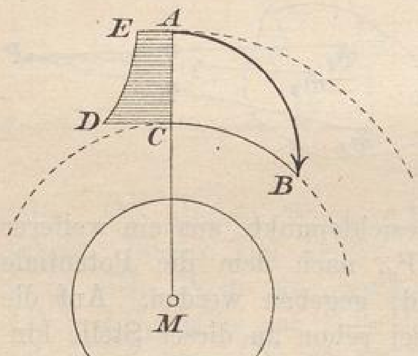
Potentialbegriffs, der nicht hoch genug angeschlagen werden kann. Von diesem Gesichtspunkte aus scheint sich Green zur Schöpfung der Potentialtheorie entschlossen zu haben.

[Vgl. Green: An essay on the application etc. Nottingham 1828 und Crell. Journal 39, 44, 47.]

Eine weiterer Vorteil wird sich später ergeben.

22) Erhaltung der Energie oder Arbeit. Die freie Masse m_2 habe in A eine beliebige Geschwindigkeit v_1 erhalten, sie bewege sich durch Anziehung der in M festgehaltenen Masse m_1 nach B, so dafs es sich zunächst um die anziehende Kraft $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ handelt. Die ursprüngliche Energie war $\frac{m_2 v_1^2}{2}$, sie geht, wenn der Körper nach B gelangt, über in $\frac{m_2 v_2^2}{2}$. Werden keine Nebenarbeiten, wie Reibungsüberwindung und dergl. geleistet, so mufs der Energieunterschied $\frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_2 v_1^2}{2}$ genau der geleisteten Arbeit entsprechen, die durch das Diagramm $ACDE$ veranschaulicht ist. Ihr Betrag ist gleich $k\, m_1\, m_2 \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$, d. h. gleich der Potentialdifferenz. Demnach ist

Fig. 15.



$$\frac{m_2}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = k m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

oder

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\, k m_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Die Bewegung erfolgt also derart, dafs die Energiedifferenz für den Anfang und das Ende jedes Weges gleich der entsprechenden Potentialdifferenz ist.

Setzt man ferner v_2 variabel gleich v und r_2 variabel gleich r, so folgt

$$\frac{m_2}{2} v^2 - \frac{k m_1 m_2}{r} = \frac{m_2}{2} v_1^2 - \frac{k m_1 m_2}{r_1} = C.$$

Rechts steht die konstante Anfangsdifferenz zwischen Energie und Potential, links stehen veränderliche Gröfsen. Trotzdem besteht Gleichheit beider Seiten. Folglich: Die Bewegung erfolgt so, dafs die Differenz zwischen Energie und Potential stets