Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

22) Erhaltung der Energie oder Arbeit

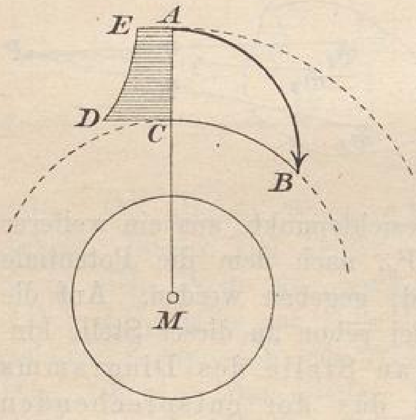
Potentialbegriffs, der nicht hoch genug angeschlagen werden kann. Von diesem Gesichtspunkte aus scheint sich Green zur Schöpfung der Potentialtheorie entschlossen zu haben.

[Vgl. Green: An essay on the application etc. Nottingham 1828 und Crell. Journal 39, 44, 47.]

Eine weiterer Vorteil wird sich später ergeben.

22) Erhaltung der Energie oder Arbeit. Die freie Masse m_2 habe in A eine beliebige Geschwindigkeit v_1 erhalten, sie bewege sich durch Anziehung der in M festgehaltenen Masse m_1 nach B, so dafs es sich zunächst um die anziehende Kraft $k\frac{m_1 m_2}{r^2}$ handelt. Die ursprüngliche Energie war $\frac{m_2 v_1^2}{2}$, sie geht, wenn der Körper nach B gelangt, über in $\frac{m_2 v_2^2}{2}$. Werden keine Nebenarbeiten, wie Reibungsüberwindung und dergl. geleistet, so mufs der Energieunterschied $\frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_2 v_1^2}{2}$ genau der geleisteten Arbeit entsprechen, die durch das Diagramm $ACDE$ veranschaulicht ist. Ihr Betrag ist gleich $k m_1 m_2 \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$, d. h. gleich der Potentialdifferenz. Demnach ist

Fig. 15.



$$\frac{m_2}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = k m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

oder

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 k m_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Die Bewegung erfolgt also derart, dafs die Energiedifferenz für den Anfang und das Ende jedes Weges gleich der entsprechenden Potentialdifferenz ist.

Setzt man ferner v_2 variabel gleich v und r_2 variabel gleich r, so folgt

$$\frac{m_2}{2} v^2 - \frac{k m_1 m_2}{r} = \frac{m_2}{2} v_1^2 - \frac{k m_1 m_2}{r_1} = C.$$

Rechts steht die konstante Anfangsdifferenz zwischen Energie und Potential, links stehen veränderliche Gröfsen. Trotzdem besteht Gleichheit beider Seiten. Folglich: Die Bewegung erfolgt so, dafs die Differenz zwischen Energie und Potential stets konstant bleibt. Also: $T - U = c$, wenn T die Energie, U das Potential bedeutet.

Die von der Anziehung geleistete Arbeit kommt als Energie zum Vorschein, welche diese Arbeit selbst wieder schaffen kann, z. B. als Hebungsarbeit, wenn die Bahn sich wieder nach aufsen lenkt. Bei dem Entfernen tritt also Verlangsamung ein.

Wird dieselbe Niveaufläche mehrfach passiert, so geschieht es stets mit derselben Geschwindigkeit.

Man bezeichnet $m_2 \frac{v^2}{2}$ als kinetische Energie. Entfernt sich der Körper, so setzt sich ein Teil davon über in potentielle Energie, die dem Diagramm $ACDE$ entspricht. Die potentielle Energie ist also aufgesammelte Hebungsarbeit. Kommt der Körper wieder näher an das Centrum, so setzt sich potentielle Energie in kinetische um.

In allen diesen Beziehungen liegt wiederum der wichtige Satz, den man den Satz von der Erhaltung der Arbeit nennt. (Energie, Wucht, auch wohl lebendige Kraft, sind Bezeichnungen für den Ausdruck $m \frac{v^2}{2}$.) Setzt man das Potential gleich $-\frac{m_1 m_2}{r}$, so geht der Satz in die gebräuchlichere Form $T + U = c$ über.

23) Ein kosmisches Beispiel. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne betrage rund 20 500 000 Meilen, die mittlere Geschwindigkeit 30 000 m. Wie grofs ist die Erdgeschwindigkeit in den verschiedenen Entfernungen von der Sonne?

Aus obiger Gleichung folgt

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2 k m_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)} = \sqrt{v_1^2 + \frac{2 k m_1 (r_1 - r)}{r r_1}}.$$

Nun war für die Sonne in Nr. 7 gefunden $\frac{k m_1}{\varrho^2} = 272$, also ist $k m_1 = 272 \cdot \varrho^2 = 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2$, denn der Sonnenradius hat 95 000 Meilen Länge. Setzt man die Werte ein, so folgt

$$v = \sqrt{9 \cdot 10^8 + \frac{2 \cdot 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2 \,(20\,500\,000 \cdot 7500 - r)}{20\,500\,000 \cdot 7500 \cdot r}}.$$

Für die Sonnennähe z. B. ist $r = \sim 20\,000\,000$ Meilen, also wird

$$v = \sqrt{9 \cdot 10^8 + \frac{2 \cdot 272 \cdot (95\,000 \cdot 7500)^2 \,(20\,500\,000 - 20\,000\,000)\, 7500}{20\,500\,000 \cdot 20\,000\,000 \cdot 7500^2}}.$$

Es folgt 30 750 m Geschwindigkeit. Man kann diesen besonderen Wert leicht mittels des Keplerschen Flächensatzes prüfen, nach dem die verschiedenen Geschwindigkeiten für gleiche Zeiträume gleiche Sektoren geben, so dafs die Geschwindigkeiten umgekehrt proportional