



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel III. Anziehung der homogenen Kugelschale, der Vollkugel und Hohlkugel.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Kapitel III.

Anziehung der homogenen Kugelschale, der Vollkugel und der Hohlkugel.

24) Vorbemerkung. Die Schwierigkeit der Anziehungsprobleme für beliebig gestaltete Körper liegt darin, daß jedes Massenteilchen des einen anziehend auf jedes Teilchen des anderen einwirkt, so daß es sich um unendlich viele Einzelkräfte von verschiedener Größe und Richtung handelt. Die Aufgabe, die Resultante und das etwa auftretende Kräftepaar zu finden, ist bisher auch mit höheren Hilfsmitteln nur in verhältnismäßig einfachen Fällen gelungen. Man macht dabei gewisse vereinfachende Annahmen. Um zunächst von dem Einflusse absehen zu können, den die Teilchen jedes einzelnen Körpers aufeinander ausüben, wird dieser als starr betrachtet. Außerdem nimmt man an, daß die Massenverteilung eine homogene sei, d. h. daß der Körper überall dieselbe Dichte habe, oder man macht wenigstens die Massenverteilung zu einer gesetzmäßigen, man läßt z. B. bei einer Kugel die Dichte nach dem Mittelpunkte hin regelmäßig zunehmen. Wir werden häufig die Dichte gleich eins setzen, so daß die Inhaltsformel zugleich die Masse angiebt.

Unsere erste Aufgabe soll darin bestehen, zu beweisen, daß eine homogen mit Masse belegte Kugelschale, ebenso eine homogene oder aus homogenen konzentrischen Schichten bestehende Kugel oder eine entsprechende konzentrische Hohlkugel, jeden außerhalb liegenden Punkt so anzieht, als ob ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

25) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen äußeren Massenpunkt.

Die Gravitationskonstante k sei gleich eins, der angezogene Punkt P habe die Masse 1 und sei um $PM = e$ vom Mittelpunkte entfernt, Fig. 16. Jede Einheit der Kugeloberfläche werde mit der Masse 1 belegt. AB sei ein Flächenteilchen von der Fläche und

ob dieselbe Masse $4r^2\pi$ im Punkte M konzentriert wäre. Demnach ergibt sich der Satz:

Die homogene Kugelschale zieht einen außerhalb liegenden Punkt so an, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte konzentriert wäre.

Beiläufig sei folgendes bemerkt. Zu jedem Flächenteilchen f_1 der Kugelschale gehört in Bezug auf Q ein Antipodenteilchen f_2 , Fig. 17. Sind f_1 und f_2 klein genug angenommen,

so darf man beide als ähnlich betrachten, was sich z. B. bei der Kreisform von selbst ergibt. (Die Mittellinien l_1 und l_2 bilden mit den Ebenen von f_1 und f_2 gleiche Winkel, also handelt es sich um Gegenschnitte des Doppelkegels.) Demnach gilt die Proportion $f_1 : f_2 = l_1^2 : l_2^2$. Da ferner die Mittellinien mit den zugehörigen Radien gleiche Winkel ϑ bilden, so bilden auch die mit ϱ_1 und ϱ_2 zusammenfallenden Anziehungskräfte mit PM gleiche Winkel ϑ . Nach dem Früheren sind aber die Anziehungskomponenten von f_1 und f_2 gleich $\frac{f_1 r^2}{e^2 l_1^2} \cos \vartheta$ bzw. $\frac{f_2 r^2}{e^2 l_2^2} \cos \vartheta$. Beide stimmen überein, weil $\frac{f_1}{l_1^2} = \frac{f_2}{l_2^2}$ ist. Je zwei in Bezug auf Q zusammengehörige Antipodenteilchen f_1 und f_2 wirken somit auf P gleich stark, und die Resultante ihrer Anziehungen fällt in die Richtung PM .

Weil dies aber an jeder Stelle stattfindet, so gilt es auch von jedem beliebig gestalteten Stücke der Kugelschale und dem zugehörigen Antipodenteile in Bezug auf den Polarpunkt Q . So zieht z. B. der rechts vom Schnitte $N_1 N_2$ liegende Teil der Kugelschale den Massenpunkt P ebenso stark an wie der links davon liegende Teil; überhaupt gilt das Behauptete von jedem Kalottenpaare, das durch einen durch Q gelegten Schnitt entsteht. Liegt P sehr nahe an der Schale, so ist die von den Tangenten bestimmte Kalotte eine kleine Scheibe, die als eben aufgefasst werden kann, und auf deren Achse der Punkt P liegt. Auch sie zieht an mit der

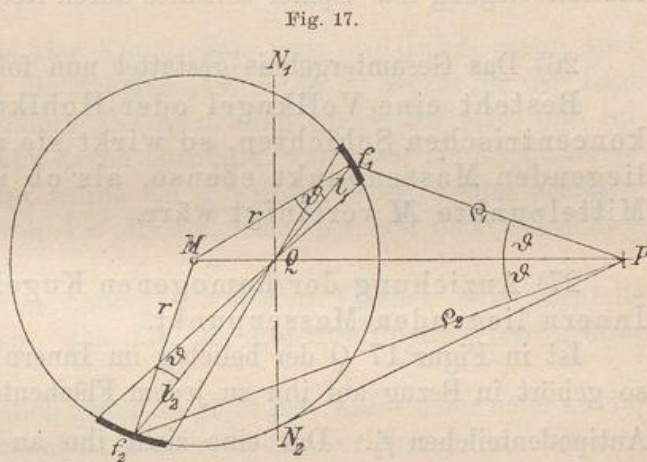


Fig. 17.

Kraft $\frac{1}{2} \cdot \frac{4r^2\pi}{e^2}$, also da jetzt $e = r$ gesetzt werden kann, mit der Kraft 2π . Dies gilt von jeder ebenen Scheibe, sobald der angezogene Punkt nahe daran liegt. Da aber die Größe von r dabei gleichgültig ist, gilt das Resultat auch von der Ebene, d. h. für $r = \infty$. Nun ist aber jede endliche Entfernung l unendlich klein gegen $r = \infty$, also gilt es von jeder Entfernung l . Die Anziehung der Ebene ist in jeder Entfernung gleich $2\pi\delta$, wenn δ die Dichte der Massenbelegung ist. Später soll dies durch Rechnung bestätigt werden.

26) Das Gesamtergebnis gestattet nun folgenden Schlufs:

Besteht eine Vollkugel oder Hohlkugel aus homogenen konzentrischen Schichten, so wirkt sie auf einen außerhalb liegenden Massenpunkt ebenso, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte M vereinigt wäre.

27) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen im Innern liegenden Massenpunkt.

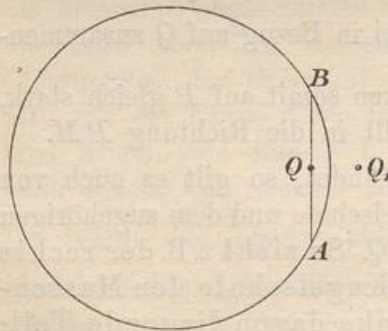
Ist in Figur 17 Q der beliebig im Innern liegende Massenpunkt, so gehört in Bezug auf ihn zu jedem Flächenteilchen f_1 ein ähnliches Antipodenteilchen f_2 . Das eine zieht ihn an mit der Kraft $\frac{f_1}{l_1^2}$,

andere mit der Kraft $\frac{f_2}{l_2^2}$. Beide Kräfte sind nach obigem gleich und

entgegengesetzt, heben sich also gegenseitig auf. Da dies überall auf der Kugeloberfläche geschieht, so ist ihre Gesamtwirkung auf Q gleich Null. Jede homogene Kugelschale übt also auf jeden im

Innern liegenden Massenpunkt die Anziehung Null aus. Das Gleiche gilt von jeder aus homogenen konzentrischen Schichten bestehenden Hohlkugel.

Fig. 18.



Der Massenpunkt Q in Fig. 18 wird durch die beiden vom Schnitte AB begrenzten Kalotten gleich stark angezogen, auch wenn Q unendlich nahe am Rande liegt. Dann zieht die kleine

Scheibe \widehat{AB} nach obigem mit der Kraft 2π an, also der Rest der Kugel mit der Kraft -2π .

Man achte also auf folgendes. Rückt Q_1 von aussen an die Kugelschale, so wird bei unendlicher Annäherung die Anziehung $\frac{4r^2\pi}{e^2}$

zu 4π . Davon kommt die Hälfte auf die unendlich kleine Scheibe AB . Jetzt rücke Q_1 ins Innere. Dort ist die Anziehung gleich Null, so daß eine plötzliche Änderung um 4π stattfindet. Diese klärt sich dadurch auf, daß die kleine Scheibe AB bei der Aufsenslage von Q den Betrag 2π der Anziehung gab, bei der Innenlage den gleichen Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung, so daß der Unterschied gleich

$$2\pi - (-2\pi) = 4\pi$$

werden muß.

Denkt man sich in der Kugelschale eine endliche, wenn auch kleine Öffnung, so daß die Scheibe AB fehlt, so würde in der Lage des Passierens der Peripherie die Anziehung gleich 2π sein, und unmittelbar rechts und links davon ebenfalls, weil eben die kleine Kreisscheibe fehlt. Dann also würde der Übergang ohne Sprung erfolgen. Die Anziehung würde von 4π allmählich auf 2π und dann allmählich auf 0 gehen.

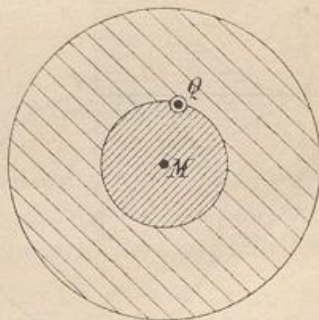
(Beim Passieren von anders gestalteten Flächen tritt ebenfalls ein Sprung um 4π ein, was für die Potentialtheorie von großer Wichtigkeit ist.)

Ist die Kugel unendlich groß, so giebt jede Kalotte der nahe an der Fläche liegenden Masseneinheit wiederum die Anziehung 2π . Die eine ist aber eine Ebene, so daß sich das obige Resultat bestätigt. Die andere kann als eine in unendlicher Entfernung befindliche Ebene aufgefaßt werden, sie giebt ebenfalls 2π , was, wie sich zeigen wird, mit dem konstanten Charakter der Anziehung einer homogenen Ebene harmoniert. Dieselbe Bemerkung läßt sich für die Aufsenslage von Q machen.

28) Folgerung für das Innere der homogenen konzentrischen Kugel. In einem kleinen Hohlraume bei Q , Fig. 19, befinde sich ein Massenpunkt. Man denke sich durch diesen eine konzentrische Kugelfläche gelegt. Die äußere Hohlkugel übt auf den Massenpunkt die Wirkung Null aus, folglich zieht nur noch der innere Kern an. An der Oberfläche der ganzen Kugel ist die Anziehung proportional ihrer Masse $\frac{4}{3}r^3\pi$ und umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius, also ist sie in Wirklichkeit proportional dem

Ausdrucke $\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{r^2} = \frac{4}{3}r\pi$, oder, da $\frac{4}{3}\pi$ konstant ist, proportional dem Radius r . Für den innern Kern handelt es sich ebenso um r_1 .

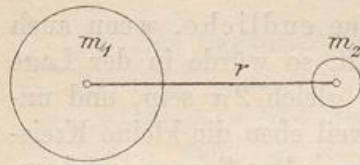
Fig. 19.



Folglich: Die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen im Innern befindlichen Punkt ist proportional seinem Abstände vom Mittelpunkte. In diesem selbst ist die Anziehung gleich Null.

29) Gegenseitige Anziehung zweier Kugeln. Ziehen sich zwei Kugeln gegenseitig an und sind ihre Massen m_1 und m_2 , Fig. 20;

Fig. 20.

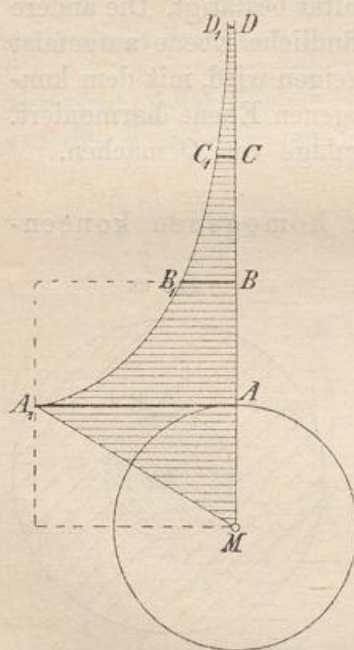


so hat man sich diese in ihren Mittelpunkten konzentriert zu denken. Die Größe der Anziehung ist, wenn r den Abstand der beiden Mittelpunkte bedeutet, proportional dem Ausdrucke $\frac{m_1 m_2}{r^2}$, der

ganz dem bei den Massenpunkten entwickelten entspricht. Die erste Kugel wird von der zweiten genau ebenso stark angezogen, wie die zweite von der ersten; es verlangt genau ebensoviel Arbeit, die kleinere von der größeren zu entfernen, wie umgekehrt die größere von der fest gedachten kleineren. Was von gegenseitigen Anziehungen gilt, gilt ebenso von gegenseitigen Abstofsungen. (Man denke an ungleichartige und gleichartige Elektrizitäten.)

Man denke an ungleichartige und gleichartige Elektrizitäten.)

Fig. 21.



Mit Hilfe der ermittelten Ergebnisse läßt sich schon eine große Menge von Problemen der sogenannten Potentialtheorie und der kosmischen Physik lösen.

30) Aufgabe. Bis zum Mittelpunkte des homogenen und feststehend gedachten Erdkörpers reiche ein Schacht. In diesem soll ein Körper von der Masse m vom Mittelpunkte aus bis zur Oberfläche gehoben werden. Die Hebung soll dann bis ins Unendliche fortgesetzt werden. Die dazu nötige Arbeit soll graphisch dargestellt und berechnet werden.

Auflösung. Der Körper hat an der Erdoberfläche das Gewicht $p = mg$, und diese Kraft werde dargestellt durch eine beliebig lange Gerade AA_1 . Nach dem Mittelpunkte hin nimmt diese Anziehungskraft

regelmäßig bis zum Werte Null ab. Das Arbeitsdiagramm für die Hebung von M bis A ist demnach das schraffierte Dreieck MAA_1 , Fig. 21.

Wird nun die Hebung nach aufsen fortgesetzt, so handelt es sich um das von der Gravitationskurve $y = \frac{pr^2}{x^2}$ begrenzte Diagramm.

Ganz dasselbe Diagramm würde entstehen, wenn man sich den kleinen Körper in M feststehend denkt und die Erde von ihm bis ins Unendliche entfernt. Für jeden der beiden Fälle stellt das Diagramm die Hebungsarbeit dar.

Diese Hebungsarbeit soll jetzt berechnet werden. Wiegt der Körper an der Erdoberfläche p Tonnen, so ist für das Diagrammdreieck MAA_1 die mittlere Anziehung nur halb so groß, also wird die Arbeit, wenn der Erdradius zu 860 Meilen oder $860 \cdot 7500$ m angenommen wird, gleich $\frac{p}{2} \cdot 860 \cdot 7500$ oder $p \cdot 3\,225\,000$ Metertonnen. Die Hebung von r_1 bis r_2 erfordert nach Nr. 17, da an Stelle der Anziehung $\frac{m}{r_1^2}$ die Anziehung $\frac{pr^2}{r_1^2}$, also pr^2 an Stelle von m tritt, die Arbeit:

$$\int_{r_1}^{r_2} pr^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right),$$

wobei $p = AA_1$ zu setzen ist.

Am einfachsten wird die Formel für $r_2 = \infty$, denn dann wird

$$\int_{r_1}^{\infty} pr^2 \frac{1}{r_1^2}.$$

So ist z. B.

$$\int_r^{\infty} pr^2 \frac{1}{r^2} = pr = p \cdot 860 \cdot 7500 = p \cdot 6\,450\,000 \text{ mt}$$

die Arbeit in Metertonnen, die nötig ist, um den Körper von A bis in unendliche Höhe zu heben. Die Hebungsarbeit von B bis ins Unendliche beträgt

$$\int_{2r}^{\infty} pr^2 \frac{1}{2r^2} = \frac{pr}{2} = \frac{p}{2} \cdot 860 \cdot 7500 = p \cdot 3\,225\,000 \text{ mt},$$

die von C bis ∞ beträgt

$$\int_{3r}^{\infty} pr^2 \frac{1}{3r^2} = \frac{pr}{3} = \frac{p}{3} \cdot 860 \cdot 7500 = p \cdot 2\,150\,000 \text{ mt}.$$

Die Hebung von A bis B erfordert $p(6\,450\,000 - 3\,225\,000) = p \cdot 3\,225\,000$ mt, die von A bis C erfordert $p(6\,450\,000 - 2\,150\,000) = p \cdot 4\,300\,000$ mt, die von M bis ins Unendliche erfordert $p(3\,225\,000 + 6\,450\,000) = p \cdot 9\,675\,000$ mt.

Man achte für die Stellen $A, B, C \dots$ auf das Verhältnis $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \dots$

31) **Aufgabe.** Mit welcher Geschwindigkeit müfste (abgesehen vom Luftwiderstande) ein Geschofs in senkrechter

Richtung abgeschossen werden, um von A aus bis B oder C oder bis zu unendlicher Höhe zu fliegen?

Auflösung. Man setze die Energie

$$\frac{mv^2}{2} = F_A^B = mg \cdot 3\,225\,000,$$

dann folgt als Abschufgeschwindigkeit für die Strecke AB

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3\,225\,000} = 7954,6 \text{ m.}$$

Für die Strecke AC handelt es sich um

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4\,300\,000} = 9185,2 \text{ m,}$$

für die Strecke $A\infty$ um

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6\,450\,000} = 11\,250 \text{ m.}$$

Es ist also eine verhältnismäßig nur geringe Geschwindigkeit, die den Körper ins Unendliche hinausschleudert.

Umgekehrt würde die Geschwindigkeit 11 250 m die größte sein, die durch die Anziehung der Erde allein einem auf ihre Oberfläche fallenden Meteorsteine verliehen werden könnte. Wiegt er an der Erdoberfläche 1 kg, so giebt ihm jene Geschwindigkeit eine Energie von $\frac{1}{9,81} \cdot 11\,250^2 = \sim 6\,450\,000$ mkg. Angenommen, diese setze sich in Wärme um, so handelt es sich um $\frac{6\,450\,000}{425} = 15\,177$ W.-E. Selbstverständlich wird nur ein Teil der Arbeit sich in Wärme umsetzen und den Stein und seine Umgebung erhitzen.

Soll eine noch größere Geschwindigkeit erreicht werden, so müßte der Körper mittels eines Schachtes ins Innere der Erde fallen. Dies giebt 13 778 m als denkbar größten Wert.

Ebenso leicht ist es, die Endgeschwindigkeit zu berechnen, wenn der Stein aus endlicher Höhe herabfällt. Ist A das entsprechende Arbeitsdiagramm, so folgt als Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2A}{m}}$. Dies ist zugleich die Formel für die entsprechende Abschufgeschwindigkeit.

Dafs man mit noch geringerer als der oben berechneten Abschufgeschwindigkeit einen Körper horizontal so fortschleudern kann, dafs er nicht zur Erde zurückkehrt, wird sich sofort ergeben.

32) Der Fall eines Körpers in den Schacht der homogenen Erde. Fällt der Körper von A bis K , Fig. 22, so ist die Anziehungsarbeit, wie sich aus dem trapezförmigen Diagramm ergibt:

$$(r-x) \frac{p + p \frac{x}{r}}{2} = \frac{p}{2} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r} = \frac{p}{2} \cdot \frac{a^2}{r} = \frac{mga^2}{2r},$$

die zugehörige Endgeschwindigkeit (nach $\frac{mv^2}{2} = \frac{mga^2}{2}$)

$$v = \sqrt{\frac{ga^2}{r}} = a\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Projiziert man diese Geschwindigkeit auf den Kreisumfang bei L , so hat man dort die Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{v}{\sin \gamma} = v \frac{r}{a}, \quad \text{oder} \quad v_1 = \frac{r}{a} a \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{g \cdot r},$$

d. h. eine konstante, von x unabhängige Randgeschwindigkeit. Fragt man sich aber, mit welcher Geschwindigkeit eine Kugel bei A wagerecht abgeschossen werden müßte, damit das Bestreben, sich von

Fig. 22.

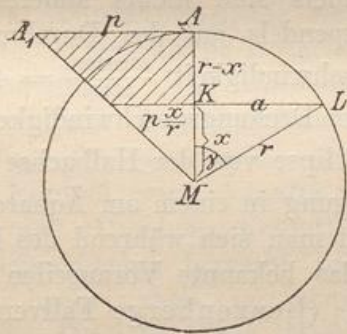
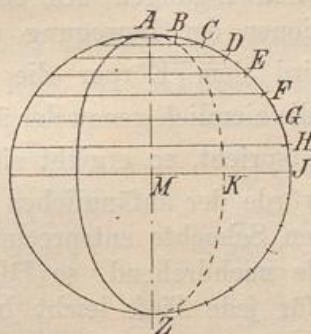


Fig. 23.



der Erde zu entfernen, in jedem Augenblicke durch die Fallbewegung gerade aufgehoben würde (so daß gewissermaßen die Kugel einen die Erde umkreisenden Mond geben würde), so findet man durch Gleichsetzung der Centrifugal- und der Anziehungskraft $\frac{mv^2}{r} = mg$, oder $v = \sqrt{gr} = \sqrt{9,81 \cdot 860 \cdot 7500} = 7954,6$ m, was mit dem soeben Gefundenen übereinstimmt. Folglich ist die unter den gemachten Voraussetzungen vor sich gehende Fallbewegung die Projektion einer regelmäßigen Kreisbewegung, die auf dem größten Kugelkreise mit der berechneten Geschwindigkeit stattfindet, Fig. 23. Der Mittelpunkt M wird also mit dieser Geschwindigkeit erreicht, und die Falldauer ist gleich der der entsprechenden Quadrantenbewegung, nämlich

$$t = \frac{r\pi}{2v} = \frac{r\pi}{2\sqrt{gr}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{860 \cdot 7500}{9,81}} = 1266 \text{ Sek.}$$

Geht der Schacht durch die Erde hindurch, so beginnt bei M das verlangsamte Aufsteigen nach Z hin, das dieselbe Zeit beansprucht. Es handelt sich also um die bekannte Sinus-versus-Bewegung, eine besondere Art von Pendelbewegung, die sich, Luftleere vorausgesetzt,

bis ins Unendliche wiederholt. (Vgl. Bewegung des Kolbens im Dampfeylinder.)

Giebt man dem Körper beim Beginne des Falles eine Seitengeschwindigkeit von $\frac{7955}{2}$ m, so würde er sich, wenn ein entsprechend gekrümmter Schacht vorhanden wäre, in einer Ellipse bewegen, die jede der parallelen Halbsehnen halbiert. Statt 2 kann man auch n setzen. Dann wird $\frac{1}{n}$ von jeder Halbsehne abgeschnitten. Dies ist ein in der Mechanik häufig behandeltes Problem, bei dem die Ellipsenbewegung wiederum nur Projektion der Kreisbewegung ist. Es handelt sich dabei um die Centralbewegung, bei der die Anziehung umgekehrt proportional der Entfernung ist. Sie läßt sich aus der Bewegung des Kreispendels elementar ableiten. Kleine Schwingungen des ebenen Pendels sind nichts anderes, als Projektionen der Bewegung des Kreispendels auf den Durchmesser.

Wird dem Körper die Seitengeschwindigkeit $\frac{40\,000\,000}{86\,400} = 463$ m erteilt, die ziemlich genau der äquatorialen Drehungsgeschwindigkeit der Erde entspricht, so ergibt sich eine Ellipse von der Halbachse $\frac{463}{7955} r$. Diese würde der anfänglichen Fallbewegung in einem am Äquator befindlichen Schachte entsprechen. Denkt man sich während des Falles die Erde nachdrehend, so läßt sich das bekannte Vorseilen nach Osten für jede Tiefe leicht berechnen. (Benzenbergs Fallversuch.)

33) Einige andere Schachtprobleme. Ein Pendel von der Schwingungsdauer $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$ würde, da g proportional der Entfernung vom Erdmittelpunkte ist, im Abstände r_1 die grössere Schwingungsdauer $t_1 = \sqrt{\frac{lr}{r_1}}$ erhalten. Da aber in Wirklichkeit die Schwingungsdauer bei den Versuchen abnimmt, so muß angenommen werden, daß anfangs die Anziehung zunimmt, weil der Kern der Erde ein weit höheres spezifisches Gewicht hat als die Außenschale. In der That ist die mittlere Dichte der Erde als etwa 5,6 nachgewiesen worden, während die der Oberfläche zukommende als 2 angenommen werden kann.

Angenommen der Schacht wäre mit Wasser, das als nicht zusammendrückbar betrachtet werden soll, angefüllt; wie groß würde dann der Druck in der Nähe des Erdmittelpunktes sein? Maßgebend ist die mittlere Stärke der Anziehung. Es handelt sich also um $\frac{860 \cdot 7500}{2} = 3\,225\,000$ Tonnen pro Quadratmeter Druckfläche, oder um 312 000 Atm., also um das Hundertfache der Spannung in einer auf 3120 Atm. beanspruchten Kruppschen Kanone. Luft würde infolge

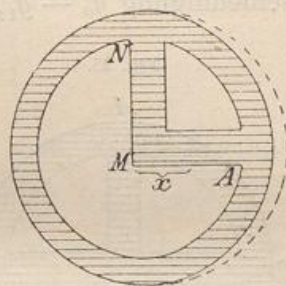
dieser Kompression, wenn das Mariottesche Gesetz bis dahin gelten würde, 417 mal so schwer sein wie Wasser, so dafs es unmöglich sein würde, sie etwa in der Taucherglocke festzuhalten. In dem Augenblicke, wo sie schwerer wird als Wasser, würde sie, kleiner und kleiner werdend, dem Mittelpunkte der Erde zustreben.

Schwieriger ist es, für eine Luftsäule im Schachte die im Mittelpunkte herrschende Spannung zu berechnen. Sie fällt infolge der Zusammendrückbarkeit der Luft weit gröfser aus als die oben berechnete. In dieser Hinsicht sei auf die Abhandlungen von Prof. Ritter über die Beschaffenheit gasförmiger Weltkörper verwiesen. Man versuche die Schachtprobleme auch für den Fall zu lösen, dafs die Dichtigkeit der Erde an der Oberfläche gleich 2 sei und nach dem Mittelpunkte hin regelmäfsig zunehme. (Vgl. Method. Lehrbuch III, Seite 129.)

34) Abplattung der Erde.

Der hypothetische Schacht findet noch anderweitige Verwertung. Er ermöglicht z. B. Untersuchungen über die Abplattung der Erde. Nach den Grundsätzen der Hydrodynamik kann man die in Fig. 24 skizzierte Schachtverbindung vom Nordpol zum Äquator hin annehmen, ohne das Problem wesentlich zu ändern. Im Polarschachte herrscht keine Centrifugalkraft, wohl aber im Äquatorialschachte. Ist das Gewicht einer Masse am Nordpol gleich mg , so ist es am Äquator, da der Einflufs der Centrifugalkraft abzuziehen ist, $mg - \frac{mv^2}{r}$. Setzt man die bekannten Gröfsen für v und r ein, so erkennt man, dafs das Gewicht um etwa $\frac{1}{290}$ abnimmt. Im Abstände x von M ist die Centrifugalkraft kleiner, entsprechend dem Faktor $\frac{x}{r}$; da aber die Schwerkraft dort in demselben Verhältnisse kleiner ist als bei A , so handelt es sich durch den ganzen Äquatorialschacht hindurch um eine Gewichtsverminderung von $\frac{1}{290}$. Hieraus schliessen nun zahlreiche Lehrbücher darauf, dafs die äquatoriale Wassersäule, um der polaren das Gleichgewicht zu halten, um $\frac{1}{290}$ höher sein müfste. Dies ist aber falsch, da übersehen wird, dafs das mittlere Gewicht maßgebend sein mufs. Nach dem Früheren handelt es sich um 6 450 000 cbm Wasser (im Schachte von 1 qm Querschnitt); der Druck ist aber nur 3 225 000 t, die Druckverminderung beträgt also nicht $\frac{6\,450\,000}{290}$ t, sondern nur $\frac{3\,225\,000}{290}$ t. Die ausgleichende Wassersäule hat somit nicht die Höhe $\frac{r}{290}$, sondern

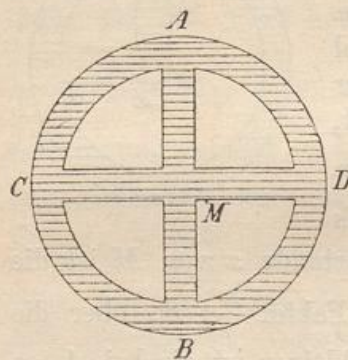
Fig. 24.



nur $\frac{r}{580}$, es handelt sich nicht um 22 242 m, sondern nur um 11 121 m. Man findet demnach auf diesem Wege nur etwa die Hälfte der wirklichen Abplattung. Das Problem ist eben ein ganz anderes als das Problem der Abplattung des flüssig zu denkenden Erdkörpers vom spezifischen Gewichte 5,56. Der sich bildende Äquatorialwulst läßt anziehende Kräfte in Erscheinung treten, die, wie die Potentialtheorie zeigt, für den Rest der Abplattung sorgen.

35) Statische Theorie der Ebbe und Flut und das Störungsgesetz. In ähnlicher Weise kann die Theorie der Ebbe und Flut in Angriff genommen werden. Es handelt sich jetzt um zwei Äquatorialschachte, Fig. 25. Senkrecht über A befinde sich der Mond. Man denke sich ihn und die Erde still gestellt und dann nach Nr. 2 beide einander entgegenfallend. Der Erdmittelpunkt M beginnt seine Bewegung mit der Beschleunigung $g_1 = \frac{0,00276}{81} = 0,00003407$ m. Nun haben aber die Punkte A , M und B Entfernungen vom Monde, die sich verhalten wie 59 : 60 : 61; demnach erhält A die Beschleunigung $g_a = g_1 \cdot \frac{60^2}{59^2}$, B dagegen $g_b = g_1 \cdot \frac{60^2}{61^2}$, d. h. A eilt voraus mit der Beschleunigung $g_a - g_1$, B bleibt zurück mit der Beschleunigung $g_1 - g_b$.

Fig. 25.



Es entsteht sonach sowohl bei A wie bei B eine Verminderung des Wassergewichtes. Angenommen, man dürfte diese gleichmäßig für die ganze Wassersäule von 3 225 000 t Gewicht annehmen, was nicht der Fall ist, so würde auf jeder Seite eine Erhöhung um etwa 0,3 m Gleichgewicht schaffen, d. h. bei A und B müßte zur Flutzeit das Wasser um 0,3 m höher stehen als bei C und D .

Es kam hier nur darauf an, die Entstehung der Flut bei B , die schwieriger zu begreifen ist, klarzustellen, weniger auf die Berechnung, die achtstellige Logarithmentafeln erfordern würde. So dann wäre der ungefähr halb so große Einfluß der Sonnenflut für Voll- und Neumond hinzuzufügen, für die Quadraturen abzuziehen, ferner hätte an die Stelle der statischen Berechnung eine dynamische zu treten, auf die jetzt nicht eingegangen werden soll (Schwingungsbewegung).

Dasselbe Ergebnis erhält man auch auf dem Wege, daß man den Erdball um den Schwerpunkt des Erd-Mondsystems in der im Anfange angegebenen Umlaufzeit von etwas mehr als 27 Tagen sich drehen läßt und die Centrifugalkräfte für A , M und B berechnet, was auf entsprechende Unterschiede führt. (Vgl. Nr. 3.)

Wichtiger aber ist folgende Inangriffnahme des Problems.

Die Anziehung des Mondes auf die Masseneinheit bei A ist gleich

$$\frac{km}{MA^2} = \frac{km}{(r-\varrho)^2},$$

auf die Masseneinheit bei C dagegen

$$\frac{km}{r^2},$$

die Differenz der Anziehungen also ist

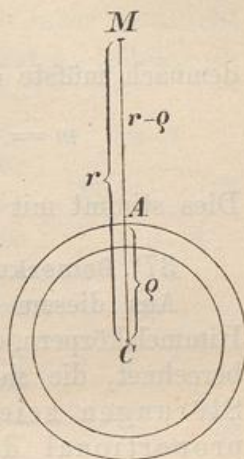
$$km \left[\frac{1}{(r-\varrho)^2} - \frac{1}{r^2} \right].$$

Nun ist, wenn man die Division $\frac{1}{(r-\varrho)^2}$ durchführt, der Quotient gleich $\frac{1}{r^2} + \frac{2\varrho}{r^3} + \frac{3\varrho^2}{r^4} + \dots$, also jene Differenz gleich

$$\begin{aligned} km \left[\frac{1}{r^2} + \frac{2\varrho}{r^3} + \frac{3\varrho^2}{r^4} + \dots - \frac{1}{r^2} \right] &= km \left[\frac{2\varrho}{r^3} + \frac{3\varrho^2}{r^4} + \frac{4\varrho^3}{r^5} + \dots \right] \\ &= \frac{2\varrho km}{r^3} \left[1 + \frac{3\varrho}{2r} + \frac{4\varrho^2}{2r^2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

In der Klammer ist $\frac{3\varrho}{2r} = \frac{3 \cdot 860}{2 \cdot 50000} = 0,0025$, man macht also nur einen Fehler von $\frac{1}{4}$ Procent, wenn man das Glied weg läßt. Die übrigen fallen, da die Reihe stark konvergiert, so schwach ins Gewicht, daß man sie erst recht vernachlässigen kann. Berücksichtigt man also nur das erste Glied, so ist die Differenz umgekehrt proportional der dritten Potenz der Mondentfernung r . Handelt es sich um Sonne und Erde, so würde $\frac{3\varrho}{2r} = \frac{3 \cdot 860}{2 \cdot 20000000}$ sein, so daß der Fehler der Vernachlässigung dieses Gliedes sogar nur 0,0000645 betragen würde. Jedenfalls darf man sagen, der Einfluß eines Weltkörpers auf die Ebbe und Flut eines anderen sei angenähert proportional der Größe $\frac{\varrho m}{r^3}$, wo ϱ der Radius des letzteren Körpers ist, während m die Masse und r den Radius des ersten bedeutet.

Fig. 26.



36) Berechnung der Mondmasse aus der Fluterscheinung.

Nun haben sowohl Mond, als auch Sonne einen Anteil an der Ebbe und Flut. Angenommen, man beobachtet durchschnittlich zur Zeit des Neu- und Vollmondes die Flut 1,45 im Gegensatz zur

Normalflut 1, zur Zeit der Quadraturen etwa 0,55, so dafs der Einfluß der Sonne einmal mit 0,45 hinzuaddiert, einmal mit etwa ebenso viel abgezogen erscheint, so würde folgende Proportion gelten:

$$\frac{m}{r^3} : \frac{m_1}{r_1^3} = 1 : 0,45,$$

demnach müßte die Mondmasse sein

$$m = \frac{r^3 m_1}{r_1^3 0,45} = \frac{1^3}{400^3} \cdot \frac{355000}{0,45} = \sim \frac{1}{81} \text{ der Erdmasse.}$$

Dies stimmt mit den Angaben der Astronomen überein.

37) Bemerkungen.

Aus diesem Beispiele erkennt man, wie man die Massen von Himmelskörpern, die selbst keine Trabanten haben, aus den „Störungen“ berechnet, die sie verursachen. Dabei wird stets angenommen, die Störungen seien proportional den Massen und umgekehrt proportional den dritten Potenzen der Entfernungen der störenden Körper. (Ähnliches zeigt sich bei den Influenzproblemen der Elektrostatik.)

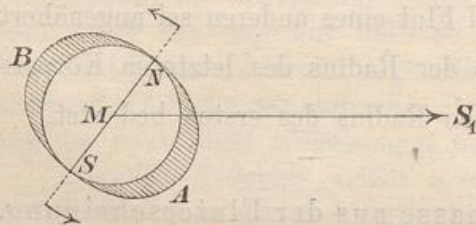
Zugleich wird man daraus schliessen, dafs die Mondflut auf der Rückseite der Erde etwas schwächer ist, als auf der vorher betrachteten Seite, ganz schwach aber in der Nähe der Pole. Die gewaltigsten Fluten hat man zu erwarten, wenn zusammenfallen Erdnähe der Sonne und des Mondes und Voll- oder Neumond, besonders, wenn die Windrichtung die Erscheinung begünstigt. (Wichtig ist auch der Durchgang des Mondes durch den Äquator.)

Manche Meteorologen haben dies auf die atmosphärische Ebbe und Flut übertragen und daraus bezüglich des Wetters auf kritische Tage erster Ordnung und ihre Vorhersagung geschlossen, was von den bekannten Misserfolgen begleitet war. Weit wichtiger ist, dafs wir aus den Zeichnungen der selbstregistrierenden Flutmesser den Anteil der Sonne und des Mondes an der Gesamterscheinung schliesslich

derart genau zu scheiden imstande sind, dafs man die Mondmasse mit größter Genauigkeit angeben kann.

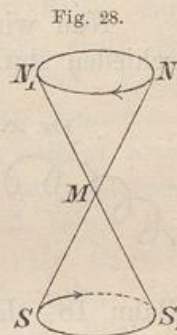
Ob diese Kenntnis so besonders wichtig ist, wird die folgende Betrachtung zeigen.

Fig. 27.

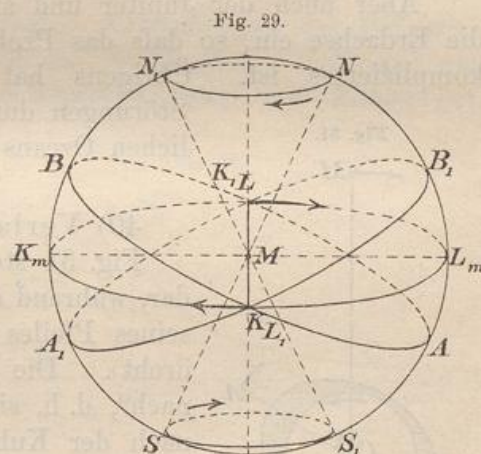


38) Präzession der Äquinoktien. Die Figur stelle die Erde als abgeplatteten Körper in der Sommerstellung dar. Bei S₁ befinde sich die Sonne. Der äquatoriale

Wulst *A* wird, da er der Sonne näher ist, stärker angezogen, als der Wulst *B*. Denkt man sich also die Erde nach der Sonne hin fallend, nachdem sie vorher zur Ruhe gebracht war, so fällt *A* schneller als *B* und dies ist bei nicht rotierender Erde nur so möglich, daß die Achse *SN*, die um etwa $22\frac{1}{2}^{\circ}$ geneigt ist, sich mehr senkrecht stellen will. Dies ist durch das Kräftepaar angedeutet, welches in der Figur an *SN* wirkt. Nun dreht sich aber die



Erde um ihre Achse, und jede Drehungsachse ist bestrebt, ihre Richtung beizubehalten. Die Lehrbücher der Physik entwickeln am Fesselschen Apparate und am Kreisel, daß dann ein Ausweichen der Achse entsteht, welches senkrecht gegen die Ebene des Kräftepaares gerichtet ist. Die Achse schlägt also eine kegelförmige Bahn ein, bei der sie ihre Neigung beibehält. Die Achse giebt demnach im Laufe der Zeit andere und andere Stellen des Himmels als sogenannte Polarpunkte (feste Punkte) an. Allerdings dauert die Umlaufzeit 26 000 Jahre. Bis zum Jahre 2095 nähert sich dieser Punkt dem bekannten Polarstern bis auf 25 Minuten, dann entfernt er sich von dort, um nach etwa 12 000 Jahren den Stern 1. Größe Wega im Sternbilde der Leier als Polarstern erscheinen zu lassen. Mit der Achse ändert sich auch die Lage der Ekliptik, die Knotenpunkte *K* und *L* rücken im Sinne der Pfeile vorwärts, und während jetzt die Winterstellung mit der Erdnähe zusammenfällt, wird sie nach 13 000 Jahren mit der Erdferne zusammenfallen. Seit Hipparch (130 vor Chr.) beträgt die Verschiebung der Äquinoktialpunkte *K* und *L* etwa 28° . Dies ist die berühmte Präcession der Nachtgleichen.



Der Antrieb zu dieser Bewegung ist am stärksten in der Zeit der Winter- und Sommerstellung, sie ist gleich Null in der Zeit der Tag- und Nachtgleichen. In Fig. 29 ist die scheinbare Himmelskugel mit horizontal angenommener Ekliptik (Ebene der Erdbahn) dargestellt. *N* und *S* bedeuten den Nordpol und Südpol der Himmelskugel in der augenblicklichen Lage, *AB* die Ebene des zugehörigen Himmelsäquators, *K* und *L* die Knoten, d. h. die Schnittpunkte der Kreise für Ekliptik und Äquator. Nach 13 000 Jahren

ist dafür die Stellung N_1, S_1, A_1, B_1 zu setzen, wobei K nach K_1 (L), L nach L_1 (K) gerückt ist. Der Knoten K wandert also, dem Pfeile entsprechend, über die Mittellage K_m nach K_1 , L über L_m nach L_1 . Ein schiefgestellter Kreisel macht mit der Achse MN dieselben Bewegungen.

Man vergleiche hierzu Klein und Sommerfeld: Theorie des Kreisels. Leipzig bei Teubner.

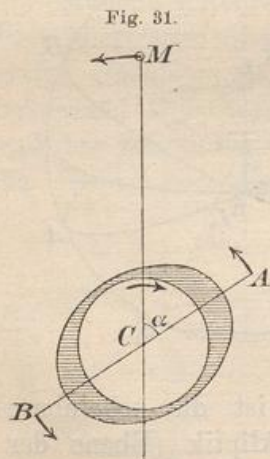
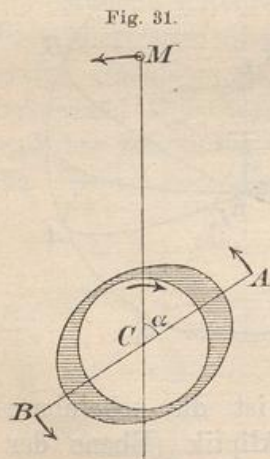
39) Nutation der Erdachse.

Nun wirkt aber der Mond ebenfalls auf die beiden Wulste verschieden stark, und nach dem Störungsgesetze wird seine Einwirkung zu der der Sonne etwa im Verhältnis 1:0,4 stehen, wie bei der Ebbe und Flut. Da nun seine Einwirkung und die der Sonne in der Regel nicht in dieselbe Ebene fallen, will er die Achse anders drehen. Seine Einwirkung hat, da die Umwälzung der Knoten seiner

Bahn $18\frac{1}{2}$ Jahre dauert, eine ebenso lange Periode. So kommt es, daß der Nordpol am Himmel in 26 000 Jahren nicht einen einfachen Kreis, sondern eine Art cyklischer Kurve zurücklegt, wie sie in der Figur angedeutet ist. Nur ist zu berücksichtigen, daß die Zahl der Windungen $\frac{26000}{18\frac{1}{2}} = 1514$ für den vollen Umlauf betragen müßte, und

daß ihr seitlicher Durchmesser nur $9'',25$ beträgt.

Aber auch der Jupiter und andere Planeten wirken störend auf die Erdachse ein, so daß das Problem ihrer Schwankungen ein sehr kompliziertes ist. Übrigens hat Laplace bewiesen, daß diese Störungen durch das Vorhandensein des beweglichen Ozeans nicht beeinflusst werden.



40) Verlangsamung der Erddrehung.

Fig. 31 stellt die äquatoriale Fluterscheinung dar, während der Mond scheinbar in der Richtung seines Pfeiles wandert (die Erde entgegengesetzt dreht). Die Fluterscheinung „schleppt etwas nach“, d. h. sie hat ihren Gipfel einige Stunden nach der Kulmination des Mondes, was durch den Winkel α angedeutet ist. Der Mond wirkt auf den Wulst bei A und B verschieden, und zwar, ähnlich wie bei der Präzessionserscheinung die Sonne, so, daß auf die Gerade AB ein Kräftepaar wirkt, welches der Erddrehung entgegengesetzt ist. Dieses wirkt zwar zunächst nur auf das Wasser ein, dem es eine schwache Ost-West-Strömung verleiht, durch Reibung

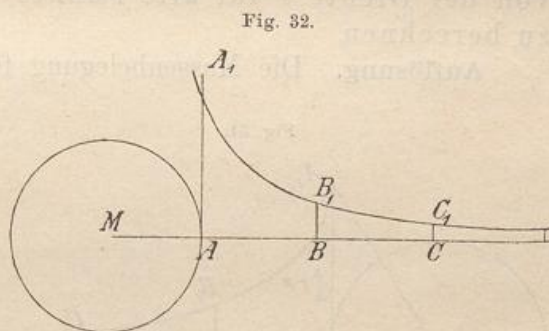
und Auftreffen auf die Kontinente aber wirkt diese Erscheinung doch hemmend auf die Erddrehung ein. Nach Berechnungen englischer Astronomen hat sich seit Hipparch den Sterntag um $\frac{1}{81}$ Sekunde verlängert. Dies macht allerdings auf das Jahr nur gegen 4 Sekunden, auf das Jahrhundert also etwa $\frac{1}{9}$ Stunde aus, veranlaßt aber beim Rückwärtsberechnen der Sonnen- und Mondfinsternisse erhebliche Unterschiede. So gering dieser Unterschied ist, so groß ist der Einfluss, wenn man ihn in technischen Maßen berechnet, denn in solchen ausgedrückt, ist die Energie der sich drehenden Erde von außerordentlicher Größe, nämlich $28\,388 \cdot 10^{21}$ Metertonnen = $28\,388 \cdot 10^{24}$ mkg. Der Energieverlust seit Hipparch beträgt also $81\,349 \cdot 10^{17}$ mkg. Nach 7 Millionen Jahren würde bei fortgesetztem gleich großem Verluste die Drehungs-Energie erschöpft sein. Sekundlich gehen $12\,918 \cdot 10^7$ mkg verloren, was $17\,225 \cdot 10^5$ Pferdestärken bedeutet, mit denen der Mond langsam aber sicher der Umdrehung der Erde entgegenarbeitet. (Vgl. Ing. Math. Band I. Seite 124.)

Wer sich für die Rückwärtsberechnungen der Sonnen- und Mondfinsternisse und ihre Bedeutung für die Festlegung weltgeschichtlicher Ereignisse interessiert, sei wieder auf die Astronomische Chronologie von Dr. Wislicenus, Leipzig bei Teubner, 1895, aufmerksam gemacht.

Nachdem so auf einige interessante Anwendungen der Potentialtheorie hingewiesen ist, kehren wir zur Kugelschale, Vollkugel und Hohlkugel zurück und stellen ihre Gravitations- und Potentialkurven für den ganzen Raum fest.

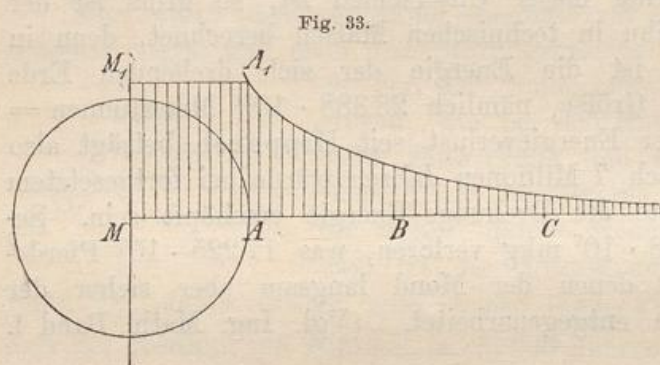
41) **Aufgabe.** Das Potential einer homogenen Kugelschale von der Dichte 1 für alle Punkte des Raumes zu untersuchen.

Auflösung. Die Massenbelegung für die Flächeneinheit sei gleich eins, der angezogene Massenpunkt habe ebenfalls die Masse eins. Dann ist für äußere Punkte, wenn ϱ der Halbmesser der Kugel, x der Abstand vom Mittelpunkt M ist, die Anziehung $\frac{4e^2\pi}{x^2}$, die Arbeit von der Stelle x bis ins Unendliche hat also nach Nr. 17 den Betrag



$$\frac{\infty}{x} F = 4\rho^2\pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{4\rho^2\pi}{x}.$$

Der Potentialwert für $x = \infty$ ist Null, er wächst bei der Annäherung bis A zur Größe $\frac{4\rho^2\pi}{\rho} = 4\rho\pi$ an. Gelangt der Punkt bei A durch eine Öffnung ins Innere der Kugelschale, so nimmt der

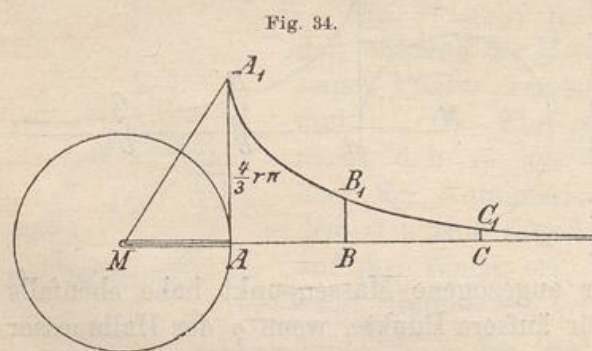


Potentialwert nicht mehr zu, da dort kein Arbeitsaufwand zur Fortbewegung von M nötig ist. Die Arbeit für die Bewegung von M bis ∞ ist also ebenso groß wie die für den Weg von A bis ∞ . Stellt man für jeden Punkt den Betrag des Potentials dar, so hat

man von M bis A stets dieselbe Höhe $4\rho\pi$, Fig. 33, dagegen im Abstände $MB = 2\rho$ die Höhe $\frac{4\rho\pi}{2}$, im Abstände $MC = 3\rho$ die Höhe $\frac{4\rho\pi}{3}$ u. s. w. Die Diagrammkurve des Potentialwertes ist eine gleichseitige Hyperbel.

42) **Aufgabe.** Das Potential der homogenen Vollkugel von der Dichte 1 für alle Punkte des Äußeren und Inneren zu berechnen.

Auflösung. Die Massenbelegung für die Raumeinheit sei gleich



eins, der angezogene Punkt habe die Masse eins, die Gravitationskonstante sei eins, dann ist die Anziehung für außerhalb liegende Punkte in der Entfernung x gleich $\frac{4}{3}r^3\pi\frac{1}{x^2}$, so daß die Diagrammkurve

$$y = \frac{4}{3}r^3\pi x^{-2},$$

Fig. 34, zu untersuchen ist. An der Stelle A ist ihre Höhe $AA_1 = \frac{4}{3}r^3\pi r^{-2} = \frac{4}{3}r\pi$, im Abstände $MB = 2r$ handelt es sich

um den vierten Teil, bei $MC = 3r$ um den neunten Teil dieser Höhe u. s. w. Die Arbeit von x bis ∞ ist nach Nr. 17

$$\frac{\infty}{x} F = \frac{4}{3} r^3 \pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \frac{1}{x},$$

und dies ist der Potentialwert für die Entfernung x . Geht man von ∞ bis A , so wächst der Potentialwert bis zur Größe $\frac{4}{3} r^3 \pi \frac{1}{r} = \frac{4}{3} r^2 \pi$ an.

Tritt nun der Punkt unter Anwendung eines engen Schachtes in das Innere ein, so nimmt der Potentialwert nach einem anderen Gesetze zu, denn das Diagramm hat im Innern von x bis r nach der Trapezformel den Inhalt

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} r \pi + \frac{4}{3} x \pi \right) (r - x) = \frac{2}{3} \pi (r^2 - x^2),$$

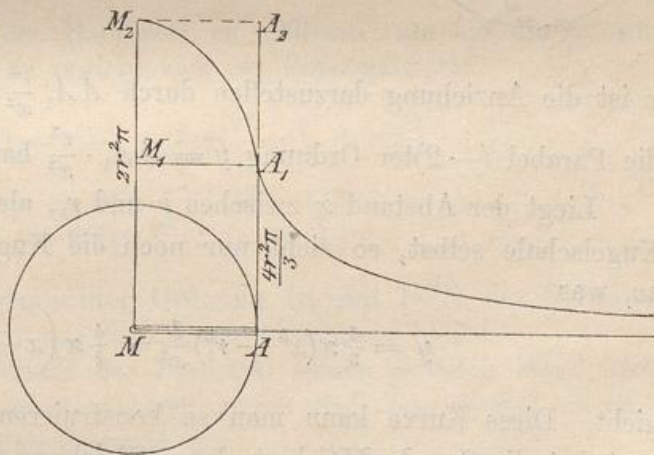
von x im Innern bis ∞ ist also die Hebungsarbeit.

$$\frac{2}{3} \pi (r^2 - x^2) + \frac{4}{3} r^2 \pi = 2 \pi \left(r^2 - \frac{x^2}{3} \right).$$

Im Mittelpunkte, d. h. für x gleich Null, ist der Potentialwert am größten, nämlich gleich $2r^2\pi$.

Die graphische Darstellung des Potentialwertes, Fig. 35, führt rechts von $AA_1 = \frac{4}{3} r^2 \pi$ auf eine gleichseitige Hyperbel. Links davon handelt es sich um eine dem Rechteck $M_1 A_1 A_2 M_2$ eingezeichnete Parabel, deren Scheitel in M_2 liegt.

Beispiel. Die letzte Aufgabe über die Vollkugel zeigte unter anderm, daß bei der Kugel vom Radius eins mit der Dichte eins die Masseneinheit für die Fortschaffung von der Oberfläche bis ins



Unendliche die Arbeit $\frac{4}{3} r^2 \pi$ z. B. in Tonnen verlangte. Dabei war $k = 1$ angenommen, während in Wahrheit $k = \frac{3g}{4r\pi\rho}$ ist. Bei der Erdkugel ist statt der Dichte 1 die Dichte 5,56 zu nehmen, ferner wiegt die

Masseneinheit der Technik im Tonnensystem 9,81 t, genauer g t. Der Arbeitsaufwand wird also in Wahrheit

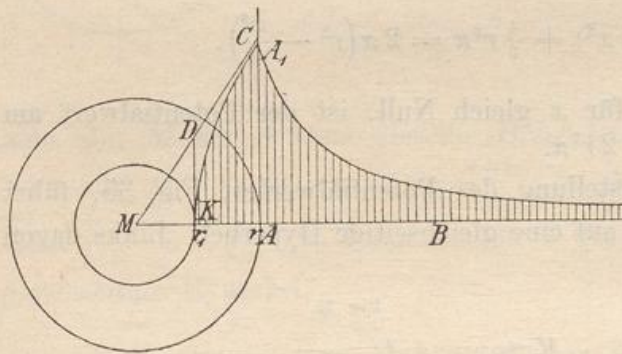
$$\frac{4r^2\pi}{3} \cdot 5,56 \cdot \frac{3g}{4r\pi \cdot 5,56} = rg \text{ Tonnen.}$$

Dies ist also das g fache von dem, was die erste Behandlung dieser Aufgabe gegeben hatte; das Ergebnis ist richtig, denn hier wird die g fache Last gehoben.

An diesem Beispiele erkennt man, wie man die Ergebnisse der Potentialtheorie in die technische Betrachtungsweise überführt.

43) **Aufgabe.** Das Potential der homogenen Hohlkugel mit den Radien r und r_1 und der Dichte 1 für alle Punkte des Raumes zu untersuchen.

Fig. 36.



Auflösung. An der Oberfläche ist die Anziehung auf die Masseneinheit

$$\frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3) \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Diese Größe werde durch die beliebige Gerade AA_1 , Fig. 36, dargestellt. In der größeren Entfernung

x ist die Anziehung darzustellen durch $AA_1 \frac{r^2}{x^2}$, so daß es sich um die Parabel (-2)ter Ordnung $y = AA_1 \cdot \frac{r^2}{x^2}$ handelt.

Liegt der Abstand x zwischen r und r_1 , also der Punkt x in der Kugelschale selbst, so zieht nur noch die Kugelschale $\frac{4}{3} \pi (x^3 - r_1^3)$ an, was

$$y = \frac{4}{3} \pi (x^3 - r_1^3) \frac{1}{x^2} = \frac{4}{3} \pi \left(x - \frac{r_1^3}{x^2} \right)$$

gibt. Diese Kurve kann man so konstruieren, daß man durch M zunächst die Gerade MC legt, deren Gleichung $y = \frac{4}{3} \pi x$ ist, so daß $AC = \frac{4}{3} \pi r$ ist. Von der Ordinate dieser Geraden ist für jeden Abstand x die Ordinate der Kurve $y = \frac{4}{3} \pi r_1^3 \cdot \frac{1}{x^2}$, die eine Parabel von Ordnung (-2) ist, abzuziehen. MC ist Asymptote der eigentlichen Kurve, die durch K und A_1 geht, bei A_1 aber nicht fortgesetzt wird.

Hat man bei D von der Asymptote aus DK gezogen, so hat man in der Entfernung $2MD$ nach unten $\frac{1}{4}DK$, in $3MD$ dagegen $\frac{1}{9}DK$ als Senkrechte zu ziehen. Im Hohlraume endlich ist die Anziehung gleich Null, dort also das Potential konstant.

Der Potentialwert für jeden Abstand $x > r$ ist gegeben durch

$$y = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3) \frac{1}{x};$$

im Unendlichen ist er Null, nach dem Gesetze der gleichseitigen Hyperbel wächst er von dort bis zum Rande hin an auf

$$\frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3) \frac{1}{r}.$$

Liegt x zwischen r_1 und r , so handelt es sich um das von der Kurve

$$y = \frac{4}{3} \pi \left(x - \frac{r_1^3}{x^2} \right)$$

begrenzte Arbeitsdiagramm, und zwar für die Strecke von x bis r . Nach der Schichtenformel erhält man die Fläche bzw. Arbeit

$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{r^2}{2} - r_1^3 \frac{r^{-1}}{-1} \right) - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{x^2}{2} - r_1^3 \frac{x^{-1}}{-1} \right),$$

oder

$$\frac{4}{3} \pi \left[\frac{r^2 - x^2}{2} + r_1^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) \right].$$

Dazu hat man den Randwert zu addieren, um auf die Gesamtarbeit zu kommen. Es ergibt sich als Potentialwert:

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3} \pi (r^3 - r_1^3) \frac{1}{r} + \frac{4}{3} \pi \left[\frac{r^2 - x^2}{2} + r_1^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{r_1^3}{x} \right]. \end{aligned}$$

Diese Parabel gemischter Ordnung ist mit Hilfe der Rechnung leicht zu konstruieren, was dem Leser überlassen bleibe.

Ist $x = r_1$, so erhält das Potential seinen größten Wert; denn im Hohlraume, wo die Anziehung gleich Null ist, wächst es nicht mehr. Der größte Potentialwert ist

$$\frac{4}{3} \pi \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r_1^2}{2} - \frac{r_1^3}{r_1} \right] = \frac{4}{3} \pi \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{3}{2} r_1^2 \right],$$

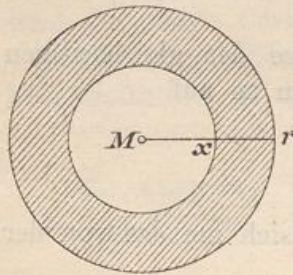
oder endlich

$$2 \pi (r^2 - r_1^2).$$

Für wirkliche Verhältnisse ist die Gravitationskonstante als Faktor beizufügen und im übrigen wie vorher zu rechnen.

44) **Aufgabe.** Das Selbstpotential der homogenen Kugel zu bestimmen. [Es handelt sich darum, die Arbeit zu berechnen, die nötig ist, um die einzelnen konzentrischen Schichten der Kugel der Reihe nach abzutragen und in unendliche Entfernung zu bringen.]

Fig. 37.



Auflösung. Angenommen, die Abtragung bis x , Fig. 37, sei schon erfolgt, dann ist nur noch eine Kugel vom Radius x übrig, bei der die Arbeit $\frac{4}{3} x^2 \pi$ erforderlich ist, um die Masseneinheit ins Unendliche zu entfernen. Die konzentrische Schicht $4x^2\pi$ (von der beliebig klein zu denkenden Dicke eins)

erfordert also die Arbeit

$$\frac{4}{3} x^2 \pi \cdot 4 x^2 \pi = \frac{16}{3} x^4 \pi^2.$$

Handelt es sich aber für diese konzentrische Schicht um den Ausdruck

$$q_x = \frac{16 \pi^2}{3} x^4,$$

so ist für die ganze Kugel von 0 bis r nach der Schichtenformel der Ausdruck

$$\frac{16 \pi^2}{3} \cdot \frac{r^5}{5}$$

zu nehmen. Das Selbstpotential hat also den Wert $\frac{16 \pi^2 \cdot r^5}{15}$. Führt man die Masse $m = \frac{4}{3} r^3 \pi$ ein, so handelt es sich zugleich um $\frac{3}{5} \frac{m^2}{r}$.

Genau ebenso viel Anziehungsarbeit wird geleistet, wenn der Körper durch allmähliches Zusammenstürzen oder Zusammenziehen kosmischer Massen entsteht, die ursprünglich über den unendlichen Raum verbreitet waren oder wenigstens einen sehr großen Raum einnahmen.

45) **Aufgabe.** Für alle Massenpunkte der homogenen Kugel die Potentialwerte zu bestimmen und ihre Summe zu bilden.

Auflösung. An der Stelle x im Innern ist nach einer früheren Aufgabe das Potential der Kugel in Bezug auf die Masseneinheit

$$2 \pi \left(r^2 - \frac{x^2}{3} \right),$$

also in Bezug auf die entsprechende konzentrische Schicht $4x^2\pi$ gleich

$$q_x = 2\pi\left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right)4x^2\pi = 8\pi^2\left(r^2x^2 - \frac{x^4}{3}\right).$$

Nach der Schichtenformel giebt dies für die ganze Kugel

$$8\pi^2\left(r^2\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{15}\right) = \frac{32\pi^2r^5}{15}.$$

Führt man die Masse $\frac{4}{3}r^3\pi$ ein, so hat man $\frac{6}{5}\frac{m^2}{r}$.

Die Aufgabe läßt sich folgendermaßen deuten: Man denke sich zwischen die Moleküle der Kugel neue Moleküle so eingeschoben, daß gewissermaßen in der Kugel noch eine zweite Kugel derselben Art liegt. Diese hypothetische zweite Kugel denke man sich mit einem Male in unendliche Entfernung gebracht und berechne die dazu nötige Arbeit. Jedes einzelne Teilchen der zweiten Kugel erfordert offenbar dieselbe Arbeit zum Wegschaffen wie jedes einzelne Teilchen der ersten, d. h. denselben Potentialwert.

Dies klärt zugleich darüber auf, warum bei dieser Aufgabe das Ergebnis doppelt so groß ist wie bei der vorhergehenden. Denkt man sich nämlich die Doppelkugel durch allmähliche Vereinigung kosmischer Massen entstanden, so ergibt sich das vierfache Selbstpotential wie bei der einfachen Kugel, denn an Stelle jeder Anziehung von Einzelmassen $\frac{m_1m_2}{r^2}$ darf man sich dabei gesetzt denken:

$$\frac{(2m_1)(2m_2)}{r^2} = 4\frac{m_1m_2}{r^2},$$

was für den ganzen Verlauf gilt. Entfernt man nun die Teilchen der zweiten Kugel einzeln ins Unendliche (nicht, wie vorher, zugleich), so ist, weil das Selbstpotential P der ersten Kugel unangetastet bleibt, die Arbeit $3P$ zu leisten. Diese besteht aus zwei Teilen, aus dem Auflösen des Selbstpotentials der zweiten Kugel, was $1P$ giebt, und dem Entfernen der zweiten Kugel von der ersten, was dem Reste $2P$, also dem Doppelten des Resultats der Aufgabe 44 entsprechen muß. Damit ist der Zusammenhang beider Beispiele ohne Rechnung aufgeklärt.

46) Anwendung des Selbstpotentials auf kosmische Verhältnisse.

Helmholtz hat eine Reihe von Problemen, die mit der Bildung des Sonnensystems und der Entstehung und Erhaltung der Sonnenwärme zusammenhängen, mit Hilfe des Selbstpotentials in einfacher Weise gelöst.

Ist M die Sonnenmasse, R ihr Radius, so ist das Selbstpotential der Sonne $\frac{3}{5} \frac{M^2}{R}$. Für die Wirklichkeit ist nun die Gravitationskonstante $k = \frac{gr^2}{m}$ (wo r und m den Radius und die Masse der Erde bedeuten) als Faktor beizufügen, was $\frac{3}{5} \frac{M^2}{R} \frac{gr^2}{m}$ giebt. Rechnet man in Metern und mit der technischen Masseneinheit des Kilogrammsystems (die 9,81 kg wiegt), um die Wärmeeinheit gleich 425 mkg setzen zu können, so sind für die Temperaturerhöhung 1°C (bei Kapazität eins) für jede Masseneinheit $9,81 \cdot 425$ mkg erforderlich. Man erhält die Temperaturerhöhung mittels der Division durch diesen Ausdruck, also

$$t = \frac{3}{5} \frac{M}{R} \frac{r^2}{425 m} = \sim \frac{0,6 \cdot (355\,000 m)r^2}{R m 425} = \sim \frac{0,6 r^2 \cdot 355\,000}{425 R}.$$

Setzt man hier $r = 860 \cdot 7500 m$, $R = 95\,000 \cdot 7500 m$, so bekommt man etwa $29\,000\,000^\circ\text{C}$, was mit dem Helmholtzschen Ergebnis zusammenstimmt, sobald man dort dieselben Erfahrungswerte benutzt. Bei geringerer Kapazität entsteht eine entsprechend höhere Temperatur. Die letztere würde wirklich entstehen, wenn der Sonnenkörper keine Ausstrahlung gehabt hätte. Durch die Ausstrahlung kann ein Abkühlungszustand eingetreten sein. Dies ist aber nicht als durchaus notwendig anzunehmen, wie sich aus folgendem ergibt.

Durch fortgesetzte Zusammenziehung der Sonne wird neue Wärme frei. Zusammenziehung des „Nebelballes“ auf den Radius R giebt das Selbstpotential $\frac{3}{5} \frac{M^2}{R} \frac{gr^2}{m}$, Zusammenziehung auf den kleineren Radius R_1 das größere Selbstpotential $\frac{3}{5} \frac{M^2}{R_1} \frac{gr^2}{m}$. Beide verhalten sich wie $\frac{R_1}{R}$, und in diesem Maße vergrößert sich die entstehende Temperatur. Der Temperaturunterschied entspricht der durch die wachsende Zusammenziehung entstandenen Wärme. An der Hand dieses Gedankenganges hat Helmholtz gezeigt, wie eine Zusammenziehung um zehn Meilen die jetzige Sonnenausstrahlung auf 2309 Jahre decken könnte. Die Rechnung soll unten durchgeführt werden.

Nun sind drei Fälle möglich: 1) Ist die Ausstrahlung stärker als der durch Zusammenziehung entstehende Wärmeersatz, so kühlt sich die Sonne ab; 2) ist sie schwächer, so erhitzt sich die Sonne; 3) ist beides gleichwertig, so bleibt die Sonnentemperatur sich gleich. Was in Wirklichkeit der Fall ist, kann nicht ohne weiteres entschieden werden, da die Ausstrahlung durchaus nicht proportional der Temperatur zu sein braucht. Man bedenke, daß die Zusammenziehung auf den halben Radius die doppelte Wärmemenge giebt, während die ausstrahlende Oberfläche auf den vierten Teil herabgesetzt wird. Die

Ausstrahlungsfähigkeit müßte also erheblich stärker wachsen als die Temperatur, wenn Gleichgewicht der letzteren herrschen soll. Die zunehmende Erhitzung ist sogar wahrscheinlicher als die Abkühlung. Es handelt sich hier um einen kritischen Punkt der allgemein verbreiteten Vorstellungweise, die eine Erhitzung des Sonnenkörpers nur für die Anfangszeiten ihrer Kosmogenie gelten läßt.

Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes mögen einige genauere Rechnungsergebnisse nach anderer Berechnungsmethode beigelegt werden, wobei der Radius der Sonne gleich 95 000 Meilen, ihre Dichtigkeit gleich 1,38, die auf ihrer Oberfläche wirkende Schwerkraft gleich dem 28,3 fachen von der auf der Erdoberfläche geltenden gesetzt werde.

Man denke sich die Sonne aus lauter konzentrischen Schichten von der Dicke 1 Meter bestehend. Eine nach der anderen soll abgenommen und in unendliche Entfernung von der Sonne gebracht werden. Die nötige Arbeit ist zu berechnen, dabei aber zu beachten, daß nach Wegnahme jeder Schicht die Anziehung der Sonnenmasse geringer wird. Wird z. B. der Radius r_1 auf den Wert r reduziert, so wird die anziehende Masse im Verhältnis $\frac{r^3}{r_1^3}$ vermindert; da aber die Entfernung der Oberfläche vom Mittelpunkt jetzt geringer ist, wird die Wirkung der Masseneinheit im Verhältnis $\frac{r_1^2}{r^2}$ verstärkt (Gravitationsgesetz). Beide Gründe zusammen geben das $\frac{r^3}{r_1^3} \cdot \frac{r_1^2}{r^2}$ fache der ursprünglichen Anziehungskraft, d. h. das $\frac{r}{r_1}$ fache

Die zum Radius r gehörige Massenschicht hat den Inhalt $4 r^2 \pi \cdot 1$, nimmt man also die Raumeinheit Sonnenmasse für die Dichte 1 zugleich als Masseneinheit an, so ist die Masse der Schicht $4 r^2 \pi \cdot 1,38$. Ist nun r in Metern gegeben, so würde sie an der Erdoberfläche ebenso viele Tonnen wiegen, an der Sonnenoberfläche dagegen das 28,3 fache, an der Oberfläche der Kugel mit Radius r endlich das $28,3 \frac{r}{r_1}$ fache, d. h.

$$\frac{1,38 \cdot 4 \cdot 28,3 r^2 \pi \cdot r}{r_1} \text{ Tonnen}$$

oder

$$\frac{1,38 \cdot 4000 \cdot 28,3 \cdot r^3 \pi}{r_1} \text{ kg.}$$

Das außerhalb der soeben betrachteten Kugel befindliche der Sonnenmasse war bereits als abgetragen gedacht. Um also diese p kg in unendliche Entfernung zu heben, braucht man nach obiger Theorie die Arbeit

$$A = pr = \frac{1,38 \cdot 4000 \cdot 28,3 \cdot r_1^4 \pi}{r_1} \text{ mkg.}$$

Um nun die gesamte Sonnenmasse schichtenweise zu entfernen, braucht man nach der Summen- oder Schichtenformel (Ing. Math. I Nr. 171) die Arbeit

$$A = \frac{4000 \cdot 1,38 \cdot 28,3 \cdot r_1^5 \pi}{5 r_1} \text{ mkg} = \frac{4000 \cdot 1,38 \cdot 28,3 \cdot \pi \cdot r_1^4}{5} \text{ mkg.}$$

Division durch 425 giebt die entsprechende Anzahl von Wärmeeinheiten.

Läfst man nun das Umgekehrte stattfinden, d. h. läfst man die einzelnen entfernten Schichten aus unendlicher Entfernung wieder herabfallen (z. B. jede erst dann, nachdem die vorhergehende auf der Sonne angelangt ist), so wird bei voller Umsetzung der entstehenden Arbeitsfähigkeit in Wärme genau dieselbe Anzahl von Wärmeeinheiten erzeugt, nämlich

$$W = \frac{4000 \cdot 1,38 \cdot 28,3 \cdot r_1^4 \pi}{5 \cdot 425} \text{ W.-E.}$$

Zum Schluß ist die Masse der Sonne wieder auf

$$1000 \cdot \frac{4}{3} r_1^3 \pi \cdot 1,38 \text{ kg}$$

angewachsen. Auf jedes kg der Masse kommen also

$$W_1 = \frac{4000 \cdot 1,38 \cdot 28,3 \cdot r_1^4 \pi}{5 \cdot 425 \cdot \frac{4000}{3} r_1^3 \pi \cdot 1,38} = \frac{84,9 r_1}{2125} \text{ W.-E.}$$

Setzt man hier $r_1 = 95\,000 \cdot 7500 \text{ m}$, so ergibt sich für jedes kg die Wärmemenge

$$W_1 = 28\,466\,000 \text{ W.-E.}$$

Wäre diese Wärme in der Sonne geblieben, und hätte die Sonnenmasse die Kapazität des Wassers, so würde also die durchschnittliche Sonnenwärme

$$28\,466\,000^\circ \text{ C}$$

betragen.

(Helmholtz berechnet nach seiner Methode $28\,611\,000^\circ \text{ C}$, was nur wenig abweicht, und zwar infolge anderer Annahme der Konstanten).

Zieht sich nun die Sonne von dem angenommenen Radius r_1 auf r_2 zusammen, so entsteht nach obigem die $\frac{r_1}{r_2}$ -fache Wärmemenge. Handelt

es sich um eine Verkleinerung des Sonnenradius um 10 Meilen, so erhält man für den Bildungsprozess dieser kleineren Sonne auf jedes kg

$$W_2 = \frac{28\,466\,000 \cdot 95\,000}{94\,990} = 28\,469\,000 \text{ W.-E.}$$

Dies giebt für die gesamte Sonnenmasse ein Mehr von $62\,724 \cdot 10^{29}$ W.-E.

Findet also eine solche, für das unbewaffnete Auge nicht einmal sichtbare, Kontraktion statt (sie beträgt ja nur $\frac{1}{9500}$, also etwa $\frac{1}{10\,000}$ des Durchmessers), so läßt es sich wohl erklären, daß die Sonne in historischen Zeiten eine Abnahme der Ausstrahlung nicht beobachten liefs. Man kann geradezu fragen, auf wie viele Jahre hinaus die soeben berechnete Wärmemenge in stande sein würde, die jetzige Ausstrahlung zu decken. Dies soll berechnet werden.

Mayer versteht unter Grofskalorie die Wärmemenge, die nötig ist, um eine Kubikmeile Wasser um 1°C zu erwärmen; sie ist also gleich $40\,854 \cdot 10^{10}$ W.-E. Nach den Messungen von Pouillet strahlt der ganze Sonnenkörper in 1 Min. $1265 \cdot 10^7$ Grofskalorien aus; die jährliche Ausstrahlung in gewöhnlichen Wärmeeinheiten beträgt also:

$$40\,854 \cdot 1265 \cdot 144 \cdot 365 \cdot 10^{18} = 27\,163 \cdot 10^{26} \text{ W.-E.}$$

Dividiert man das obige Ergebnis durch dieses, so erhält man:

$$\bullet \frac{62\,724 \cdot 10^{29}}{27\,163 \cdot 10^{26}} = 2,3091 \cdot 10^3 = 2309,1 \text{ Jahre.}$$

Auf so lange Zeit wäre also die Sonnenausstrahlung durch jene unscheinbare Kontraktion gedeckt.

Erfolgt die genannte Kontraktion in kürzerer Zeit, so ist sogar statt einer Abkühlung eine weitere Erwärmung möglich, was nach den Berechnungen Ritters über kosmische Gaskugeln durchaus nicht unwahrscheinlich erscheint. Bei zu langsamer Kontraktion dagegen findet Abkühlung statt. Auch ein Gleichgewichtszustand ist denkbar.

Nach Violle ist die Sonnenausstrahlung etwas gröfser, nämlich auf 1 qm $1\,159\,000$ W.-E i. d. Min., d. h. im ganzen $38\,860 \cdot 10^{26}$ auf das Jahr, statt $27\,163 \cdot 10^{26}$. Jene Kontraktion also würde nach diesen Angaben die Ausstrahlung nur auf 1614 Jahre decken.

Helmholtz hat auf Pouillet'scher Grundlage für $\frac{1}{10\,000}$ Kontraktion 2289 Jahre gefunden, was mit dem obigen Ergebnis für $\frac{1}{9500}$ Kontraktion gut zusammenstimmt.

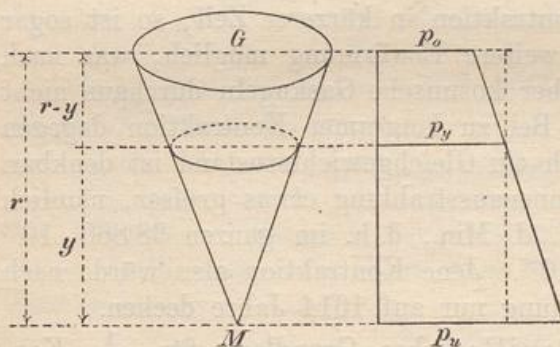
Der bekannte Begründer der Wärmemechanik, Mayer-Heilbronn, hatte sich die Nichtabnahme der Wärme bei der Sonne nicht durch eine Kontraktion, sondern durch eine Art von Meteorregen zu erklären gesucht, wo die aufschlagenden Massen ihre Energie in Wärme um-

zusetzen haben. Er selbst aber hatte gegen diesen Meteorregen zugleich das Bedenken ausgesprochen, daß er die Masse der Sonne vergrößern und die Umlaufzeit der Planeten verkürzen würde; deshalb versuchte er durch einen sogenannten Centrifugalprozess eigentümlicher Art seine Theorie zu retten, was ihm nicht gelang. Die Helmholtzsche Idee einer dauernden Kontraktion infolge der Gravitationswirkung, der als Widerstand die Wirkung der Wärmeschwingungen der Moleküle entgegenstehen, macht den Mayerschen Massenprozess überflüssig; sie läßt sich, wie aus obigem ersichtlich, in elementarster Weise auf grund der Mayerschen Umsetzungstheorie entwickeln, so weit, daß man in der Lage ist, alle hierher gehörigen Arbeiten der neueren Physiker zu verfolgen und ihre Berechnungen zu prüfen. Von hier aus könnte man z. B. in das Studium der Ritterschen Untersuchungen über die Konstitution gasförmiger Weltkörper eintreten, die in den Poggendorfschen Annalen erschienen und auch vereinigt im Buchhandel zu haben sind. Man hat die Ergebnisse zwar angezweifelt, aber nicht widerlegt. Sie stehen und fallen mit den angenommenen physikalischen Grundgesetzen. Wer Ritter widerlegen will, muß die Gastheorie in ihren Fundamenten umgestalten.

Das Vorgetragene wird die Wichtigkeit, die dem Begriffe des Selbstpotentials beizulegen ist, einigermaßen veranschaulichen.

47) Die Anziehung innerhalb einer Erdkugel, deren Dichte von der Oberfläche zum Centrum hin regelmäßig

Fig. 38.



von $\delta = 2,5$ bis zu einem zu berechnenden Werte zunimmt, während die mittlere Dichte gleich 5,6 ist.

a) Um auch ein Problem über konzentrische Schichten von veränderlicher Dichte zu behandeln, wird die obige Aufgabe gestellt.

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (genauer einen Sektor) aus der Erdkugel herausgeschnitten. Ist seine obere Fläche G , so hat er in Höhe y den Querschnitt $G_y = G \frac{y^2}{r^2}$. Ist das spezifische Gewicht unten p_u , oben p_0 , so ergibt sich bei regelmäßiger Zunahme nach unten für die Höhe y die Dichte p_y aus der Gleichung

$$(p_u - p_y) : y = (p_y - p_o) : (r - y),$$

also

$$p_y = p_u - y \frac{p_u - p_o}{r}.$$

Die Schicht in Höhe y fällt also ins Gewicht mit

$$G_y \cdot p_y = G \frac{y^2}{r^2} \cdot p_u - G y^3 \cdot \frac{p_u - p_o}{r^3}.$$

Für die Summe der Schichten von $y = 0$ bis $y = y_1$ giebt die Schichtenformel

$$1) \quad G \frac{p_u}{r^2} \cdot \frac{y_1^3}{3} - G \frac{p_u - p_o}{r^3} \cdot \frac{y_1^4}{4},$$

also für die Schichten von $y = 0$ bis $y = y_1$

$$G \frac{p_u}{3} r - G (p_u - p_o) \frac{r}{4} = \frac{Gr}{12} [4p_u - 3p_u + 3p_o] = \frac{Gr}{12} [p_u + 3p_o].$$

Der ganze Kegel hat aber bei einer mittleren Dichte 5,6 die Masse

$$G \frac{r}{3} 5,6,$$

also ist

$$\frac{Gr}{12} [p_u + 3p_o] = G \frac{r}{3} 5,6$$

d. h.

$$p_u + 3p_o = 4 \cdot 5,6 = 22,4$$

also

$$p_u = 22,4 - 3p_o = 22,4 - 7,5 = 14,9,$$

d. h. etwas höher, als die Dichte des Quecksilbers (13,59).

So kann man für jedes beliebige Zunahmegesetz die Dichte im Centrum berechnen. Die Astronomie giebt in der Regel 12 als wahrscheinliches spezifisches Gewicht im Erdkern an.

b) **Aufgabe.** Wie stark ist die Anziehung im Innern dieser Kugel und zwar in Entfernung y vom Mittelpunkte?

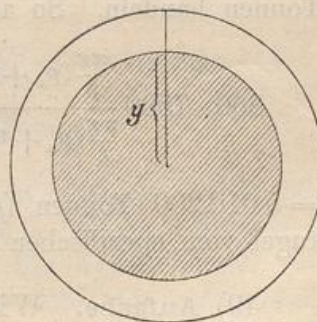
Auflösung. Vorher war die Masse des Kegels von 0 bis y_1 berechnet als

$$G \left[\frac{p_u y_1^3}{r^2 3} - \frac{p_u - p_o}{r^3} \frac{y_1^4}{4} \right].$$

Für die Kugel mit Radius y_1 findet man also

$$4r^2 \pi \left[\frac{p_u y_1^3}{r^2 3} - \frac{p_u - p_o}{r^3} \frac{y_1^4}{4} \right] = \frac{\pi y_1^3}{3r} [4p_u r - 3(p_u - p_o)y_1].$$

Fig. 39.



Diese Masse ist im Mittelpunkte konzentriert zu denken, und da nur der Kern anziehend wirkt, erhält man die Anziehung durch Multiplikation mit $\frac{1}{y_1^2}$. Sie ist also

$$\frac{\pi y_1}{3r} [4p_u r - 3(p_u - p_o) y_1].$$

Hier ist $p_u = 14,9$ und $p_o = 2,5$ einzusetzen.

48) **Aufgabe.** Von der Oberfläche bis zur Mitte reiche ein mit Wasser angefüllter Schacht von 1 qm Querschnitt. Wie stark ist der Wasserdruck pro qm im Centrum der Kugel?

Auflösung. Aus

$$\frac{\pi y_1}{3r} [4p_u r - 3(p_u - p_o) y_1]$$

ergibt sich das Anziehungsdiagramm für den ganzen Radius. Die Schichtenformel ergibt von 0 bis r als Diagrammfläche

$$\frac{4\pi}{3} p_u \frac{r^2}{2} - \frac{\pi}{r} (p_u - p_o) \frac{r^3}{3} = \frac{\pi r^2}{3} [2p_u - (p_u - p_o)]$$

oder

$$\frac{\pi r^2}{3} [p_u + p_o].$$

Die mittlere Anziehung ist (da r die Grundlinie des Diagramms bedeutet)

$$\frac{\pi r}{3} (p_u + p_o).$$

Wirkte überall die obere Anziehung

$$\frac{\pi r}{3r} [4p_u r - 3(p_u - p_o) r] = \frac{\pi r}{3} [p_u + 3p_o],$$

die 1 Tonne pro Meter Höhe giebt, so würde es sich um 860 · 7500 Tonnen handeln. So aber handelt es sich um

$$860 \cdot 7500 \frac{\frac{\pi r}{3} (p_u + p_o)}{\frac{\pi r}{3} (p_u + 3p_o)} = 860 \cdot 7500 \frac{p_u + p_o}{p_u + 3p_o} = 860 \cdot 7500 \cdot \frac{17,4}{22,4}$$

= 5 010 200 Tonnen (gegen 3 250 000 Tonnen bei homogener Erdkugel vom spezifischen Gewichte 5,6).

49) **Aufgabe.** Wie schwer würde der Druck im Centrum sein, wenn der Schacht von 1 qm Querschnitt mit einem beweglichen Kerne ausgefüllt würde, dessen Dichte an jeder Stelle y die oben für diese berechnete ist?

Auflösung. Multipliziert man die für y berechnete Dichte

$$p_y = \frac{p_u r - y(p_u - p_o)}{r}$$

mit der dort wirkenden Anziehung, so giebt die Schicht von 1 m Dicke dort den Anteil

$$\frac{\pi}{3r^2} [4p_u r y - 3(p_u - p_o)y^2] [p_u r - (p_u - p_o)y] =$$

1) $\frac{\pi}{3r^2} [4p_u^2 r^2 y - 7p_u r(p_u - p_o)y^2 + 3(p_u - p_o)^2 y^3].$

Bildet man das Anziehungsdiagramm, so ist dessen Fläche nach der Schichtenformel

$$\frac{\pi}{3r^2} \left[4p_u^2 r^2 \frac{r^2}{2} - 7p_u r(p_u - p_o) \frac{r^3}{3} + 3(p_u - p_o)^2 \frac{r^4}{4} \right]$$

$$= \frac{\pi r^2}{36} [5p_u^2 + 10p_u p_o + 9p_o^2],$$

seine mittlere Höhe also

$$\frac{\pi r}{36} [5p_u^2 + 10p_u p_o + 9p_o^2].$$

Die oben wirkende Anziehung ist aber nach 1), wo $y = r$ zu setzen ist, gleich

$$\frac{\pi r}{3} p_o (p_u + 3p_o)$$

und giebt 2,5 Tonnen Druck auf das Meter Höhe

Herrscht sie überall, so würde es sich um $2,5 \cdot 860 \cdot 7500$ Tonnen handeln. So aber handelt es sich um

$$2,5 \cdot 860 \cdot 7500 \cdot \frac{5p_u^2 + 10p_u p_o + 9p_o^2}{12p(p_u + 3p_o)} \text{ Tonnen.}$$

Setzt man wieder $p_u = 14,9$ und $p_o = 2,5$, so erhält man

$$\frac{2,5 \cdot 860 \cdot 7500 \cdot 1536,55}{672} = 36\,871\,000 \text{ Tonnen}$$

statt 18200000 Tonnen bei homogener Erde von mittlerer Dichte 5,6. Der große Unterschied erklärt sich daraus, daß bei der homogenen Erde die Abnahme der Anziehung nach unten hin weit schneller vor sich geht, da die nicht mehr anziehenden Außenschichten von großer Fläche sind und viel Masse enthalten. Bei dem vorliegenden Problem enthalten aber gerade die großflächigen Schichten verhältnismäßig wenig Masse.

50) **Aufgabe.** Das Potential dieser Kugel für alle Raumpunkte zu finden.

Auflösung. Hebung im Schachte erfordert von M bis y , weil

$$\frac{\pi}{3r}[4p_u r y - 3(p_u - p_o)y^2]$$

die Anziehung bei y ist, die Arbeit

$$1) \quad \frac{\pi}{3r}[4p_u r \frac{y^2}{2} - 3(p_u - p_o)\frac{y^3}{3}] = \frac{\pi}{3r}[2p_u r y^2 - (p_u - p_o)y^3].$$

Also: Hebung bis r erfordert

$$2) \quad \frac{\pi r^3}{3r}[2p_u - (p_u - p_o)] = \frac{\pi r^2}{3}[p_u + p_o] = \frac{\pi r^2}{3} 17,4.$$

Hebung von r bis ∞ erfordert

$$3) \quad \frac{m_1}{r} = 5,6 \cdot \frac{4}{3} \frac{r^3 \pi}{r} = 5,6 \cdot \frac{4}{3} r^2 \pi = \frac{22,4}{3} r^2 \pi.$$

Folglich ist das Potential im Innern bei Abstand y gleich 2) + 3) - 1) oder

$$\begin{aligned} & \frac{r^2 \pi}{3} (17,4 + 22,4) - \frac{\pi}{3r} [2p_u r y^2 - (p_u - p_o)y^3] \\ & = \frac{r^2 \pi}{3} 39,8 - \frac{\pi y^2}{3r} [29,8r - 12,4 \cdot y]. \end{aligned}$$

Das Potential für äußere Punkte in Entfernung ϱ ist gleich

$$\frac{m_1}{\varrho} = \frac{22,4 r^3 \pi}{3 \varrho}.$$

Damit ist auch diese Aufgabe vollständig erledigt.

In ähnlicher Weise würde man zu rechnen haben, wenn man für die Dichte im Centrum der Erde den Wert 12 oder überhaupt das von Laplace für die Zunahme der Dichte nach der Mitte hin aufgestellte Gesetz zu Grunde legen wollte. Alle Berechnungen dieser Art können also mit elementaren Hilfsmitteln erledigt werden.