Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

25) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen äusseren Massenpunkt

Kapitel III.

Anziehung der homogenen Kugelschale, der Vollkugel und der Hohlkugel.

24) Vorbemerkung. Die Schwierigkeit der Anziehungsprobleme für beliebig gestaltete Körper liegt darin, dafs jedes Massenteilchen des einen anziehend auf jedes Teilchen des anderen einwirkt, so dafs es sich um unendlich viele Einzelkräfte von verschiedener Gröfse und Richtung handelt. Die Aufgabe, die Resultante und das etwa auftretende Kräftepaar zu finden, ist bisher auch mit höheren Hilfsmitteln nur in verhältnismäfsig einfachen Fällen gelungen. Man macht dabei gewisse vereinfachende Annahmen. Um zunächst von dem Einflusse absehen zu können, den die Teilchen jedes einzelnen Körpers aufeinander ausüben, wird dieser als starr betrachtet. Aufserdem nimmt man an, dafs die Massenverteilung eine homogene sei, d. h. dafs der Körper überall dieselbe Dichte habe, oder man macht wenigstens die Massenverteilung zu einer gesetzmäfsigen, man läfst z. B. bei einer Kugel die Dichte nach dem Mittelpunkte hin regelmäfsig zunehmen. Wir werden häufig die Dichte gleich eins setzen, so dafs die Inhaltsformel zugleich die Masse angiebt.

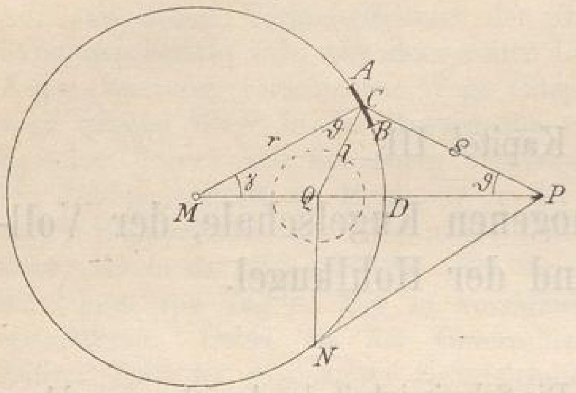
Unsere erste Aufgabe soll darin bestehen, zu beweisen, dafs eine homogen mit Masse belegte Kugelschale, ebenso eine homogene oder aus homogenen koncentrischen Schichten bestehende Kugel oder eine entsprechende koncentrische Hohlkugel, jeden aufserhalb liegenden Punkt so anzieht, als ob ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

25) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen äufseren Massenpunkt.

Die Gravitationskonstante k sei gleich eins, der angezogene Punkt P habe die Masse 1 und sei um $PM = e$ vom Mittelpunkte entfernt, Fig. 16. Jede Einheit der Kugeloberfläche werde mit der Masse 1 belegt. AB sei ein Flächenteilchen von der Fläche und

Masse f. Ist es um ϱ von P entfernt, so übt es auf diesen Massenpunkt die Anziehung $\frac{f}{\varrho^2}$ aus. Da aber aus Symmetriegründen die Resultante aller einzelnen Anziehungen in die Richtung PM fallen mufs, so braucht man statt $\frac{f}{\varrho^2}$ nur die wirksame Komponente $\frac{f}{\varrho^2}\cos\vartheta$ zu untersuchen.

Fig. 16.



Diese soll zur Erleichterung der Summierung in anderer Form geschrieben werden, und zwar mit Hilfe der Polare (Berührungssehne) NQ von P. Für diese ist bekanntlich (Method. Lehrbuch II, Nr. 74) $MQ : MD = MD : MP$ oder $MQ : r = r : e$, d. h. $MQ = \frac{r^2}{e}\cdot$ Daraus folgt, dafs $\triangle MQC \sim \triangle MCP$, denn $MQ : MC = MC : MP$, und Winkel γ ist beiden Dreiecken gemeinsam. Aus der Ähnlichkeit aber folgt $l : r = \varrho : e$, so dafs $\varrho = \frac{le}{r}$ ist. Demnach kann die erwähnte Anziehungskomponente auch als $\frac{fr^2}{e^2 l^2}\cos\vartheta$ geschrieben werden.

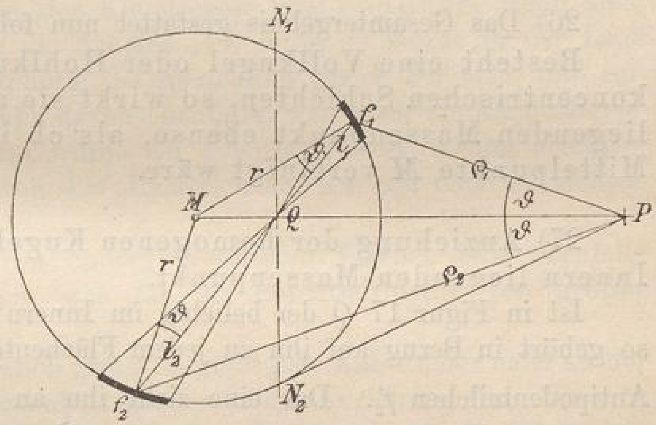
Die Summe der Anziehungen sämtlicher Flächenteilchen, d. h. die Resultante, ist demnach $\Sigma\frac{fr^2}{e^2l^2}\cos\vartheta$ oder $\frac{r^2}{e^2}\Sigma\frac{f\cos\vartheta}{l^2}\cdot$ Hier kann $\frac{f\cos\vartheta}{l^2}$ in einfacher Weise gedeutet werden. Aus dem Flächenteilchen f, das als kreisrund angenommen werden darf, und dem Punkte Q läfst sich ein Kegel herstellen, dessen Mittellinie l mit r den Winkel ϑ bildet (Ähnlichkeit der Dreiecke). Jeder Normalschnitt dieses Kegels bildet also mit der Ebene f ebenfalls den Winkel ϑ. Denkt man sich um Q eine Kugel vom Radius 1 gelegt, so schneidet diese den Kegel in einer Fläche, die seinem Normalschnitte $f\cos\vartheta$ ähnlich ist, während ihr Inhalt das $\frac{1}{l^2}$ fache, also gleich $\frac{f\cos\vartheta}{l^2}$ ist. Denkt man sich nun sämtliche Kegelgrundflächen f auf diese Einheitskugel projiziert, so ergiebt sich als Summe der Projektionen deren Oberfläche $4\cdot 1^2\pi$, und demnach ist $\frac{r^2}{e^2}\Sigma\frac{f\cos\vartheta}{l^2} = \frac{4r^2\pi}{e^2}\cdot$ Dies ist die gesuchte Resultante.

Nun ist aber nach der gemachten Annahme $4r^2\pi$ die Massenbelegung der Kugelschale. Diese wirkt also auf P genau ebenso, als ob dieselbe Masse $4 r^2 \pi$ im Punkte M koncentriert wäre. Demnach ergiebt sich der Satz:

Die homogene Kugelschale zieht einen aufserhalb liegenden Punkt so an, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte koncentriert wäre.

Beiläufig sei folgendes bemerkt. Zu jedem Flächenteilchen f_1 der Kugelschale gehört in Bezug auf Q ein Antipodenteilchen f_2, Fig. 17. Sind f_1 und f_2 klein genug angenommen, so darf man beide als ähnlich betrachten, was sich z. B. bei der Kreisform von selbst ergiebt. (Die Mittellinien l_1 und l_2 bilden mit den Ebenen von f_1 und f_2 gleiche Winkel, also handelt es sich um Gegenschnitte des Doppelkegels.) Demnach gilt die Proportion $f_1 : f_2 = l_1^2 : l_2^2$. Da ferner die Mittellinien mit den zugehörigen Radien gleiche Winkel ϑ bilden, so bilden auch die mit ϱ_1 und ϱ_2 zusammenfallenden Anziehungskräfte mit PM gleiche Winkel ϑ. Nach dem Früheren sind aber die Anziehungskomponenten von f_1 und f_2 gleich $\frac{f_1 r^2}{e^2 l_1^2} \cos \vartheta$ bezw. $\frac{f_2 r^2}{e^2 l_2^2} \cos \vartheta$. Beide stimmen überein, weil $\frac{f_1}{l_1^2} = \frac{f_2}{l_2^2}$ ist. Je zwei in Bezug auf Q zusammengehörige Antipodenteilchen f_1 und f_2 wirken somit auf P gleich stark, und die Resultante ihrer Anziehungen fällt in die Richtung PM.

Fig. 17.



Weil dies aber an jeder Stelle stattfindet, so gilt es auch von jedem beliebig gestalteten Stücke der Kugelschale und dem zugehörigen Antipodenteile in Bezug auf den Polarpunkt Q. So zieht z. B. der rechts vom Schnitte $N_1 N_2$ liegende Teil der Kugelschale den Massenpunkt P ebenso stark an wie der links davon liegende Teil; überhaupt gilt das Behauptete von jedem Kalottenpaare, das durch einen durch Q gelegten Schnitt entsteht. Liegt P sehr nahe an der Schale, so ist die von den Tangenten bestimmte Kalotte eine kleine Scheibe, die als eben aufgefafst werden kann, und auf deren Achse der Punkt P liegt. Auch sie zieht an mit der

Kraft $\frac{1}{2} \cdot \frac{4r^2\pi}{e^2}$, also da jetzt $e = r$ gesetzt werden kann, mit der Kraft 2π. Dies gilt von jeder ebenen Scheibe, sobald der angezogene Punkt nahe daran liegt. Da aber die Gröfse von r dabei gleichgültig ist, gilt das Resultat auch von der Ebene, d. h. für $r = \infty$. Nun ist aber jede endliche Entfernung l unendlich klein gegen $r = \infty$, also gilt es von jeder Entfernung l. Die Anziehung der Ebene ist in jeder Entfernung gleich $2\pi\delta$, wenn δ die Dichte der Massenbelegung ist. Später soll dies durch Rechnung bestätigt werden.

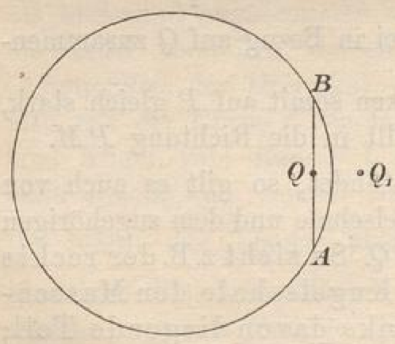
26) Das Gesamtergebnis gestattet nun folgenden Schlufs:

Besteht eine Vollkugel oder Hohlkugel aus homogenen koncentrischen Schichten, so wirkt sie auf einen aufserhalb liegenden Massenpunkt ebenso, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte M vereinigt wäre.

27) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen im Innern liegenden Massenpunkt.

Ist in Figur 17 Q der beliebig im Innern liegende Massenpunkt, so gehört in Bezug auf ihn zu jedem Flächenteilchen f_1 ein ähnliches Antipodenteilchen f_2. Das eine zieht ihn an mit der Kraft $\frac{f_1}{l_1^2}$, das andere mit der Kraft $\frac{f_2}{l_2^2}$. Beide Kräfte sind nach obigem gleich und entgegengesetzt, heben sich also gegenseitig auf. Da dies überall auf der Kugeloberfläche geschieht, so ist ihre Gesamtwirkung auf Q gleich Null. Jede homogene Kugelschale übt also auf jeden im Innern liegenden Massenpunkt die Anziehung Null aus. Das Gleiche gilt von jeder aus homogenen koncentrischen Schichten bestehenden Hohlkugel.

Fig. 18.



Der Massenpunkt Q in Fig. 18 wird durch die beiden vom Schnitte AB begrenzten Kalotten gleich stark angezogen, auch wenn Q unendlich nahe am Rande liegt. Dann zieht die kleine Scheibe $\widehat{AB}$ nach obigem mit der Kraft 2π an, also der Rest der Kugel mit der Kraft -2π.

Man achte also auf folgendes. Rückt Q_1 von aufsen an die Kugelschale, so wird bei unendlicher Annäherung die Anziehung $\frac{4r^2\pi}{e^2}$