Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

27) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen in Innern liegenden Massenpunkt

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Kraft $\frac{1}{2} \cdot \frac{4 r^2 \pi}{e^2}$, also da jetzt $e = r$ gesetzt werden kann, mit der Kraft 2π. Dies gilt von jeder ebenen Scheibe, sobald der angezogene Punkt nahe daran liegt. Da aber die Gröfse von r dabei gleichgültig ist, gilt das Resultat auch von der Ebene, d. h. für $r = \infty$. Nun ist aber jede endliche Entfernung l unendlich klein gegen $r = \infty$, also gilt es von jeder Entfernung l. Die Anziehung der Ebene ist in jeder Entfernung gleich $2\pi\delta$, wenn δ die Dichte der Massenbelegung ist. Später soll dies durch Rechnung bestätigt werden.

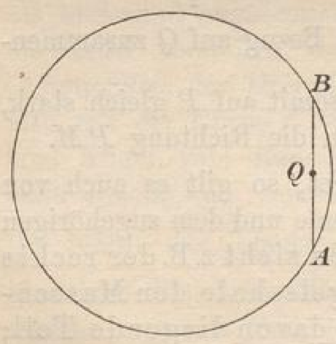
26) Das Gesamtergebnis gestattet nun folgenden Schlufs:

Besteht eine Vollkugel oder Hohlkugel aus homogenen koncentrischen Schichten, so wirkt sie auf einen aufserhalb liegenden Massenpunkt ebenso, als ob ihre ganze Masse im Mittelpunkte M vereinigt wäre.

27) Anziehung der homogenen Kugelschale auf einen im Innern liegenden Massenpunkt.

Ist in Figur 17 Q der beliebig im Innern liegende Massenpunkt, so gehört in Bezug auf ihn zu jedem Flächenteilchen f_1 ein ähnliches Antipodenteilchen f_2. Das eine zieht ihn an mit der Kraft $\frac{f_1}{l_1^2}$, das andere mit der Kraft $\frac{f_2}{l_2^2}$. Beide Kräfte sind nach obigem gleich und entgegengesetzt, heben sich also gegenseitig auf. Da dies überall auf der Kugeloberfläche geschieht, so ist ihre Gesamtwirkung auf Q gleich Null. Jede homogene Kugelschale übt also auf jeden im Innern liegenden Massenpunkt die Anziehung Null aus. Das Gleiche gilt von jeder aus homogenen koncentrischen Schichten bestehenden Hohlkugel.

Fig. 18.



Der Massenpunkt Q in Fig. 18 wird durch die beiden vom Schnitte AB begrenzten Kalotten gleich stark angezogen, auch wenn Q unendlich nahe am Rande liegt. Dann zieht die kleine Scheibe $\widehat{AB}$ nach obigem mit der Kraft 2π an, also der Rest der Kugel mit der Kraft -2π.

Man achte also auf folgendes. Rückt Q_1 von aufsen an die Kugelschale, so wird bei unendlicher Annäherung die Anziehung $\frac{4 r^2 \pi}{e^2}$

zu 4π. Davon kommt die Hälfte auf die unendlich kleine Scheibe AB. Jetzt rücke Q_1 ins Innere. Dort ist die Anziehung gleich Null, so dafs eine plötzliche Änderung um 4π stattfindet. Diese klärt sich dadurch auf, dafs die kleine Scheibe AB bei der Aufsenlage von Q den Betrag 2π der Anziehung gab, bei der Innenlage den gleichen Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung, so dafs der Unterschied gleich

$$2\pi - (-2\pi) = 4\pi$$

werden mufs.

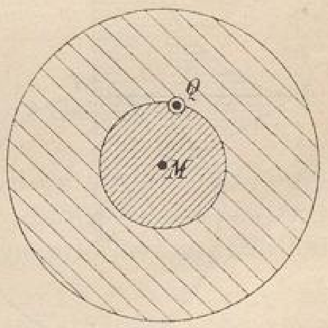
Denkt man sich in der Kugelschale eine endliche, wenn auch kleine Öffnung, so dafs die Scheibe AB fehlt, so würde in der Lage des Passierens der Peripherie die Anziehung gleich 2π sein, und unmittelbar rechts und links davon ebenfalls, weil eben die kleine Kreisscheibe fehlt. Dann also würde der Übergang ohne Sprung erfolgen. Die Anziehung würde von 4π allmählich auf 2π und dann allmählich auf 0 gehen.

(Beim Passieren von anders gestalteten Flächen tritt ebenfalls ein Sprung um 4π ein, was für die Potentialtheorie von grofser Wichtigkeit ist.)

Ist die Kugel unendlich grofs, so giebt jede Kalotte der nahe an der Fläche liegenden Masseneinheit wiederum die Anziehung 2π. Die eine ist aber eine Ebene, so dafs sich das obige Resultat bestätigt. Die andere kann als eine in unendlicher Entfernung befindliche Ebene aufgefafst werden, sie giebt ebenfalls 2π, was, wie sich zeigen wird, mit dem konstanten Charakter der Anziehung einer homogenen Ebene harmoniert. Dieselbe Bemerkung läfst sich für die Aufsenlage von Q machen.

28) Folgerung für das Innere der homogenen koncentrischen Kugel. In einem kleinen Hohlraume bei Q, Fig. 19, befinde sich ein Massenpunkt. Man denke sich durch diesen eine koncentrische Kugelfläche gelegt. Die äufsere Hohlkugel übt auf den Massenpunkt die Wirkung Null aus, folglich zieht nur noch der innere Kern an. An der Oberfläche der ganzen Kugel ist die Anziehung proportional ihrer Masse $\frac{4}{3}r^3\pi$ und umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius, also ist sie in Wirklichkeit proportional dem

Fig. 19.



Ausdrucke $\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{r^2} = \frac{4}{3}r\pi$, oder, da $\frac{4}{3}\pi$ konstant ist, proportional dem Radius r. Für den innern Kern handelt es sich ebenso um r_1.