Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

28) Folgerungen für das Innere der homogenen koncentrischen Kugel

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

zu 4π. Davon kommt die Hälfte auf die unendlich kleine Scheibe AB. Jetzt rücke Q_1 ins Innere. Dort ist die Anziehung gleich Null, so dafs eine plötzliche Änderung um 4π stattfindet. Diese klärt sich dadurch auf, dafs die kleine Scheibe AB bei der Aufsenlage von Q den Betrag 2π der Anziehung gab, bei der Innenlage den gleichen Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung, so dafs der Unterschied gleich

$$2\pi - (-2\pi) = 4\pi$$

werden mufs.

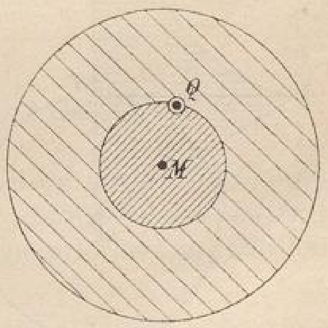
Denkt man sich in der Kugelschale eine endliche, wenn auch kleine Öffnung, so dafs die Scheibe AB fehlt, so würde in der Lage des Passierens der Peripherie die Anziehung gleich 2π sein, und unmittelbar rechts und links davon ebenfalls, weil eben die kleine Kreisscheibe fehlt. Dann also würde der Übergang ohne Sprung erfolgen. Die Anziehung würde von 4π allmählich auf 2π und dann allmählich auf 0 gehen.

(Beim Passieren von anders gestalteten Flächen tritt ebenfalls ein Sprung um 4π ein, was für die Potentialtheorie von grofser Wichtigkeit ist.)

Ist die Kugel unendlich grofs, so giebt jede Kalotte der nahe an der Fläche liegenden Masseneinheit wiederum die Anziehung 2π. Die eine ist aber eine Ebene, so dafs sich das obige Resultat bestätigt. Die andere kann als eine in unendlicher Entfernung befindliche Ebene aufgefafst werden, sie giebt ebenfalls 2π, was, wie sich zeigen wird, mit dem konstanten Charakter der Anziehung einer homogenen Ebene harmoniert. Dieselbe Bemerkung läfst sich für die Aufsenlage von Q machen.

28) Folgerung für das Innere der homogenen koncentrischen Kugel. In einem kleinen Hohlraume bei Q, Fig. 19, befinde sich ein Massenpunkt. Man denke sich durch diesen eine koncentrische Kugelfläche gelegt. Die äufsere Hohlkugel übt auf den Massenpunkt die Wirkung Null aus, folglich zieht nur noch der innere Kern an. An der Oberfläche der ganzen Kugel ist die Anziehung proportional ihrer Masse $\frac{4}{3}r^3\pi$ und umgekehrt proportional dem Quadrate des Radius, also ist sie in Wirklichkeit proportional dem

Fig. 19.

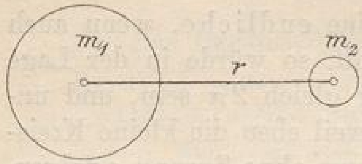


Ausdrucke $\frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{r^2} = \frac{4}{3}r\pi$, oder, da $\frac{4}{3}\pi$ konstant ist, proportional dem Radius r. Für den innern Kern handelt es sich ebenso um r_1.

Folglich: Die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen im Innern befindlichen Punkt ist proportional seinem Abstande vom Mittelpunkte. In diesem selbst ist die Anziehung gleich Null.

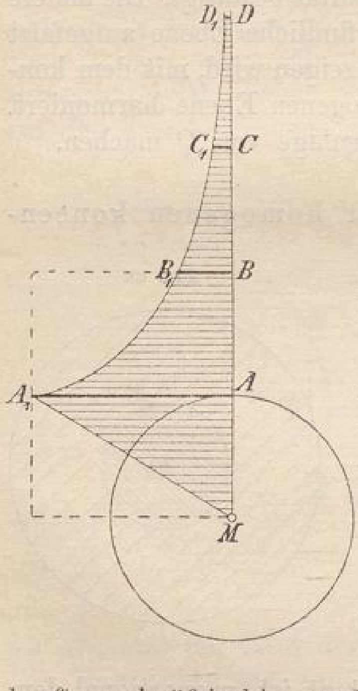
29) Gegenseitige Anziehung zweier Kugeln. Ziehen sich zwei Kugeln gegenseitig an und sind ihre Massen m_1 und m_2, Fig. 20, so hat man sich diese in ihren Mittelpunkten koncentriert zu denken. Die Gröfse der Anziehung ist, wenn r den Abstand der beiden Mittelpunkte bedeutet, proportional dem Ausdrucke $\frac{m_1 m_2}{r^2}$, der ganz dem bei den Massenpunkten entwickelten entspricht. Die erste Kugel wird von der zweiten genau ebenso stark angezogen, wie die zweite von der ersten; es verlangt genau ebensoviel Arbeit, die kleinere von der gröfseren zu entfernen, wie umgekehrt die gröfsere von der fest gedachten kleineren. Was von gegenseitigen Anziehungen gilt, gilt ebenso von gegenseitigen Abstofsungen. (Man denke an ungleichartige und gleichartige Elektrizitäten.)

Fig. 20.



Mit Hilfe der ermittelten Ergebnisse läfst sich schon eine grofse Menge von Problemen der sogenannten Potentialtheorie und der kosmischen Physik lösen.

Fig. 21.



30) **Aufgabe.** Bis zum Mittelpunkte des homogen und feststehend gedachten Erdkörpers reiche ein Schacht. In diesem soll ein Körper von der Masse m vom Mittelpunkte aus bis zur Oberfläche gehoben werden. Die Hebung soll dann bis ins Unendliche fortgesetzt werden. Die dazu nötige Arbeit soll graphisch dargestellt und berechnet werden.

Auflösung. Der Körper hat an der Erdoberfläche das Gewicht $p = mg$, und diese Kraft werde dargestellt durch eine beliebig lange Gerade AA_1. Nach dem Mittelpunkte hin nimmt diese Anziehungskraft regelmäfsig bis zum Werte Null ab. Das Arbeitsdiagramm für die Hebung von M bis A ist demnach das schraffierte Dreieck MAA_1, Fig. 21.