



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

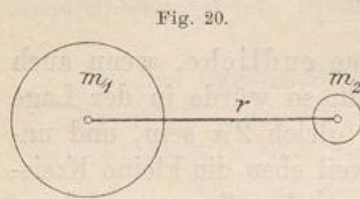
Leipzig, 1898

30) Berechnung der Hebungsarbeit vom Erdcentrum bis ins Unendliche

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Folglich: Die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen im Innern befindlichen Punkt ist proportional seinem Abstände vom Mittelpunkte. In diesem selbst ist die Anziehung gleich Null.

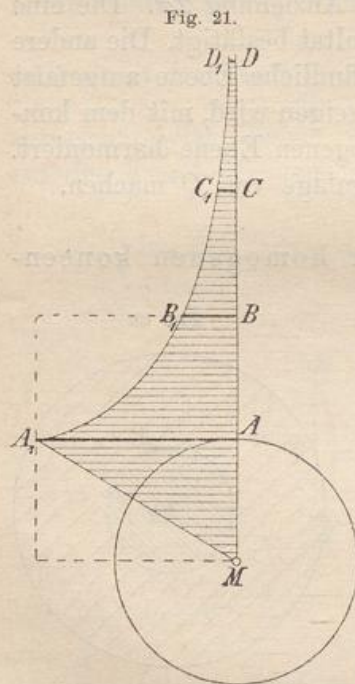
29) Gegenseitige Anziehung zweier Kugeln. Ziehen sich zwei Kugeln gegenseitig an und sind ihre Massen m_1 und m_2 , Fig. 20;



so hat man sich diese in ihren Mittelpunkten konzentriert zu denken. Die Gröfse der Anziehung ist, wenn r den Abstand der beiden Mittelpunkte bedeutet, proportional dem Ausdrucke $\frac{m_1 m_2}{r^2}$, der

ganz dem bei den Massenpunkten entwickelten entspricht. Die erste Kugel wird von der zweiten genau ebenso stark angezogen, wie die zweite von der ersten; es verlangt genau ebensoviel Arbeit, die kleinere von der gröfseren zu entfernen, wie umgekehrt die gröfseren von der fest gedachten kleineren. Was von gegenseitigen Anziehungen gilt, gilt ebenso von gegenseitigen Abstofsungen. (Man denke an ungleichartige und gleichartige Elektrizitäten.)

Mit Hilfe der ermittelten Ergebnisse läfst sich schon eine grofse Menge von Problemen der sogenannten Potentialtheorie und der kosmischen Physik lösen.



30) Aufgabe. Bis zum Mittelpunkte des homogenen und feststehend gedachten Erdkörpers reiche ein Schacht. In diesem soll ein Körper von der Masse m vom Mittelpunkte aus bis zur Oberfläche gehoben werden. Die Hebung soll dann bis ins Unendliche fortgesetzt werden. Die dazu nötige Arbeit soll graphisch dargestellt und berechnet werden.

Auflösung. Der Körper hat an der Erdoberfläche das Gewicht $p = mg$, und diese Kraft werde dargestellt durch eine beliebig lange Gerade AA_1 . Nach dem Mittelpunkte hin nimmt diese Anziehungskraft

regelmäßig bis zum Werte Null ab. Das Arbeitsdiagramm für die Hebung von M bis A ist demnach das schraffierte Dreieck MAA_1 , Fig. 21.

Wird nun die Hebung nach aufsen fortgesetzt, so handelt es sich um das von der Gravitationskurve $y = \frac{pr^2}{x^2}$ begrenzte Diagramm.

Ganz dasselbe Diagramm würde entstehen, wenn man sich den kleinen Körper in M feststehend denkt und die Erde von ihm bis ins Unendliche entfernt. Für jeden der beiden Fälle stellt das Diagramm die Hebungsarbeit dar.

Diese Hebungsarbeit soll jetzt berechnet werden. Wiegt der Körper an der Erdoberfläche p Tonnen, so ist für das Diagrammdreieck MAA_1 die mittlere Anziehung nur halb so groß, also wird die Arbeit, wenn der Erdradius zu 860 Meilen oder $860 \cdot 7500$ m angenommen wird, gleich $\frac{p}{2} \cdot 860 \cdot 7500$ oder $p \cdot 3\,225\,000$ Metertonnen. Die Hebung von r_1 bis r_2 erfordert nach Nr. 17, da an Stelle der Anziehung $\frac{m}{r_1^2}$ die Anziehung $\frac{pr^2}{r_1^2}$, also pr^2 an Stelle von m tritt, die Arbeit:

$$\int_{r_1}^{r_2} pr^2 \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right),$$

wobei $p = AA_1$ zu setzen ist.

Am einfachsten wird die Formel für $r_2 = \infty$, denn dann wird

$$\int_{r_1}^{\infty} pr^2 \frac{1}{r_1^2}.$$

So ist z. B.

$$\int_r^{\infty} \frac{pr^2}{r} = pr = p \cdot 860 \cdot 7500 = p \cdot 6\,450\,000 \text{ mt}$$

die Arbeit in Metertonnen, die nötig ist, um den Körper von A bis in unendliche Höhe zu heben. Die Hebungsarbeit von B bis ins Unendliche beträgt

$$\int_{2r}^{\infty} \frac{pr^2}{2r} = \frac{pr}{2} = \frac{p}{2} \cdot 860 \cdot 7500 = p \cdot 3\,225\,000 \text{ mt},$$

die von C bis ∞ beträgt

$$\int_{3r}^{\infty} \frac{pr^2}{3r} = \frac{pr}{3} = \frac{p}{3} \cdot 860 \cdot 7500 = p \cdot 2\,150\,000 \text{ mt}.$$

Die Hebung von A bis B erfordert $p(6\,450\,000 - 3\,225\,000) = p \cdot 3\,225\,000$ mt, die von A bis C erfordert $p(6\,450\,000 - 2\,150\,000) = p \cdot 4\,300\,000$ mt, die von M bis ins Unendliche erfordert $p(3\,225\,000 + 6\,450\,000) = p \cdot 9\,675\,000$ mt.

Man achte für die Stellen $A, B, C \dots$ auf das Verhältnis $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \dots$

31) **Aufgabe.** Mit welcher Geschwindigkeit müfste (abgesehen vom Luftwiderstand) ein Geschofs in senkrechter