Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

31) Berechnung der für eine bestimmte Schusshöhe nötigen Abschussgeschwindigkeit

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Wird nun die Hebung nach aufsen fortgesetzt, so handelt es sich um das von der Gravitationskurve $y = \frac{pr^2}{x^2}$ begrenzte Diagramm.

Ganz dasselbe Diagramm würde entstehen, wenn man sich den kleinen Körper in M feststehend denkt und die Erde von ihm bis ins Unendliche entfernt. Für jeden der beiden Fälle stellt das Diagramm die Hebungsarbeit dar.

Diese Hebungsarbeit soll jetzt berechnet werden. Wiegt der Körper an der Erdoberfläche p Tonnen, so ist für das Diagrammdreieck MAA_1 die mittlere Anziehung nur halb so grofs, also wird die Arbeit, wenn der Erdradius zu 860 Meilen oder 860 · 7500 m angenommen wird, gleich $\frac{p}{2} \cdot 860 \cdot 7500$ oder $p \cdot 3\,225\,000$ Metertonnen. Die Hebung von r_1 bis r_2 erfordert nach Nr. 17, da an Stelle der Anziehung $\frac{m}{r_1^2}$ die Anziehung $\frac{pr^2}{r_1^2}$, also pr^2 an Stelle von m tritt, die Arbeit:

$$\overset{r_2}{\underset{r_1}{F}} = pr^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

wobei $p = AA_1$ zu setzen ist.

Am einfachsten wird die Formel für $r_2 = \infty$, denn dann wird

$$\overset{\infty}{\underset{r_1}{F}} = \frac{pr^2}{r_1}.$$

So ist z. B.

$$\overset{\infty}{\underset{r}{F}} = \frac{pr^2}{r} = pr = p \cdot 860 \cdot 7500 = p \cdot 6\,450\,000 \text{ mt}$$

die Arbeit in Metertonnen, die nötig ist, um den Körper von A bis in unendliche Höhe zu heben. Die Hebungsarbeit von B bis ins Unendliche beträgt

$$\overset{\infty}{\underset{2r}{F}} = \frac{pr^2}{2r} = \frac{pr}{2} = \frac{p}{2}\ 860 \cdot 7500 = p \cdot 3\,225\,000 \text{ mt},$$

die von C bis ∞ beträgt

$$\overset{\infty}{\underset{3r}{F}} = \frac{pr^2}{3r} = \frac{pr}{3} = \frac{p}{3}\ 860 \cdot 7500 = p \cdot 2\,150\,000 \text{ mt}.$$

Die Hebung von A bis B erfordert $p\,(6\,450\,000 - 3\,225\,000) = p \cdot 3\,225\,000$ mt, die von A bis C erfordert $p\,(6\,450\,000 - 2\,150\,000) = p \cdot 4\,300\,000$ mt, die von M bis ins Unendliche erfordert $p(3\,225\,000 + 6\,450\,000) = p \cdot 9\,675\,000$ mt.

Man achte für die Stellen $A, B, C \ldots$ auf das Verhältnis $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} \cdots$

31) **Aufgabe.** Mit welcher Geschwindigkeit müfste (abgesehen vom Luftwiderstande) ein Geschofs in senkrechter

Richtung abgeschossen werden, um von A aus bis B oder C oder bis zu unendlicher Höhe zu fliegen?

Auflösung. Man setze die Energie

$$\frac{mv^2}{2} = \overset{B}{\underset{A}{F}} = mg\, 3\,225\,000\,,$$

dann folgt als Abschufsgeschwindigkeit für die Strecke AB

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3\,225\,000} = 7954{,}6 \text{ m}.$$

Für die Strecke AC handelt es sich um

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4\,300\,000} = 9185{,}2 \text{ m},$$

für die Strecke $A\infty$ um

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6\,450\,000} = 11\,250 \text{ m}.$$

Es ist also eine verhältnismäfsig nur geringe Geschwindigkeit, die den Körper ins Unendliche hinausschleudert.

Umgekehrt würde die Geschwindigkeit 11 250 m die gröfste sein, die durch die Anziehung der Erde allein einem auf ihre Oberfläche fallenden Meteorsteine verliehen werden könnte. Wiegt er an der Erdoberfläche 1 kg, so giebt ihm jene Geschwindigkeit eine Energie von $\frac{1}{9{,}81} \cdot 11\,250^2 = \sim 6\,450\,000$ mkg. Angenommen, diese setze sich in Wärme um, so handelt es sich um $\frac{6\,450\,000}{425} = 15\,177$ W.-E. Selbstverständlich wird nur ein Teil der Arbeit sich in Wärme umsetzen und den Stein und seine Umgebung erhitzen.

Soll eine noch gröfsere Geschwindigkeit erreicht werden, so müfste der Körper mittels eines Schachtes ins Innere der Erde fallen. Dies giebt 13 778 m als denkbar gröfsten Wert.

Ebenso leicht ist es, die Endgeschwindigkeit zu berechnen, wenn der Stein aus endlicher Höhe herabfällt. Ist A das entsprechende Arbeitsdiagramm, so folgt als Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2A}{m}}$. Dies ist zugleich die Formel für die entsprechende Abschufsgeschwindigkeit.

Dafs man mit noch geringerer als der oben berechneten Abschufsgeschwindigkeit einen Körper horizontal so fortschleudern kann, dafs er nicht zur Erde zurückkehrt, wird sich sofort ergeben.

32) Der Fall eines Körpers in den Schacht der homogenen Erde. Fällt der Körper von A bis K, Fig. 22, so ist die Anziehungsarbeit, wie sich aus dem trapezförmigen Diagramm ergiebt:

$$(r - x)\frac{p + p\frac{x}{r}}{2} = \frac{p}{2} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r} = \frac{p}{2} \cdot \frac{a^2}{r} = \frac{mg}{2}\frac{a^2}{r},$$