Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

32) Fall eines Körpers in den Schacht der homogenen Erde

Richtung abgeschossen werden, um von A aus bis B oder C oder bis zu unendlicher Höhe zu fliegen?

Auflösung. Man setze die Energie

$$\frac{mv^2}{2} = \overset{B}{\underset{A}{F}} = mg\,3\,225\,000,$$

dann folgt als Abschufsgeschwindigkeit für die Strecke AB

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 3\,225\,000} = 7954{,}6\,\text{m}.$$

Für die Strecke AC handelt es sich um

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4\,300\,000} = 9185{,}2\,\text{m},$$

für die Strecke $A\infty$ um

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6\,450\,000} = 11\,250\,\text{m}.$$

Es ist also eine verhältnismäfsig nur geringe Geschwindigkeit, die den Körper ins Unendliche hinausschleudert.

Umgekehrt würde die Geschwindigkeit 11 250 m die gröfste sein, die durch die Anziehung der Erde allein einem auf ihre Oberfläche fallenden Meteorsteine verliehen werden könnte. Wiegt er an der Erdoberfläche 1 kg, so giebt ihm jene Geschwindigkeit eine Energie von $\frac{1}{9{,}81} \cdot 11\,250^2 = \sim 6\,450\,000$ mkg. Angenommen, diese setze sich in Wärme um, so handelt es sich um $\frac{6\,450\,000}{425} = 15\,177$ W.-E. Selbstverständlich wird nur ein Teil der Arbeit sich in Wärme umsetzen und den Stein und seine Umgebung erhitzen.

Soll eine noch gröfsere Geschwindigkeit erreicht werden, so müfste der Körper mittels eines Schachtes ins Innere der Erde fallen. Dies giebt 13 778 m als denkbar gröfsten Wert.

Ebenso leicht ist es, die Endgeschwindigkeit zu berechnen, wenn der Stein aus endlicher Höhe herabfällt. Ist A das entsprechende Arbeitsdiagramm, so folgt als Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2A}{m}}$. Dies ist zugleich die Formel für die entsprechende Abschufsgeschwindigkeit.

Dafs man mit noch geringerer als der oben berechneten Abschufsgeschwindigkeit einen Körper horizontal so fortschleudern kann, dafs er nicht zur Erde zurückkehrt, wird sich sofort ergeben.

32) Der Fall eines Körpers in den Schacht der homogenen Erde. Fällt der Körper von A bis K, Fig. 22, so ist die Anziehungsarbeit, wie sich aus dem trapezförmigen Diagramm ergiebt:

$$(r - x)\frac{p + p\frac{x}{r}}{2} = \frac{p}{2} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r} = \frac{p}{2} \cdot \frac{a^2}{r} = \frac{mg}{2}\frac{a^2}{r},$$

die zugehörige Endgeschwindigkeit $\left(\text{nach } \frac{mv^2}{2} = \frac{mg}{2}\frac{a^2}{r}\right)$

$$v = \sqrt{\frac{ga^2}{r}} = a\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Projiziert man diese Geschwindigkeit auf den Kreisumfang bei L, so hat man dort die Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{v}{\sin\gamma} = v\frac{r}{a}, \quad \text{oder} \quad v_1 = \frac{r}{a}a\sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{g \cdot r},$$

d. h. eine konstante, von x unabhängige Randgeschwindigkeit. Fragt man sich aber, mit welcher Geschwindigkeit eine Kugel bei A wagerecht abgeschossen werden müfste, damit das Bestreben, sich von

Fig. 22.

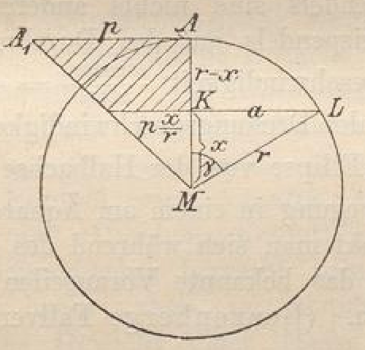
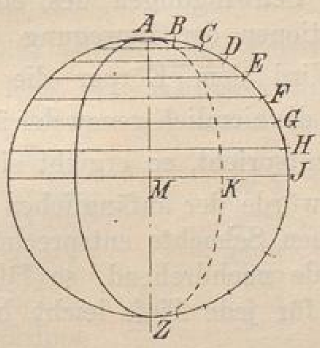


Fig. 23.



der Erde zu entfernen, in jedem Augenblicke durch die Fallbewegung gerade aufgehoben würde (so dafs gewissermafsen die Kugel einen die Erde umkreisenden Mond geben würde), so findet man durch Gleichsetzung der Centrifugal- und der Anziehungskraft $\frac{mv^2}{r} = mg$, oder $v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81 \cdot 860 \cdot 7500} = 7954{,}6$ m, was mit dem soeben Gefundenen übereinstimmt. Folglich ist die unter den gemachten Voraussetzungen vor sich gehende Fallbewegung die Projektion einer regelmäfsigen Kreisbewegung, die auf dem gröfsten Kugelkreise mit der berechneten Geschwindigkeit stattfindet, Fig. 23. Der Mittelpunkt M wird also mit dieser Geschwindigkeit erreicht, und die Falldauer ist gleich der der entsprechenden Quadrantenbewegung, nämlich

$$t = \frac{r\pi}{2v} = \frac{r\pi}{2\sqrt{gr}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{860 \cdot 7500}{9{,}81}} = 1266 \text{ Sek.}$$

Geht der Schacht durch die Erde hindurch, so beginnt bei M das verlangsamte Aufsteigen nach Z hin, das dieselbe Zeit beansprucht. Es handelt sich also um die bekannte Sinus-versus-Bewegung, eine besondere Art von Pendelbewegung, die sich, Luftleere vorausgesetzt, bis ins Unendliche wiederholt. (Vgl. Bewegung des Kolbens im Dampfcylinder.)

Giebt man dem Körper beim Beginne des Falles eine Seitengeschwindigkeit von $\frac{7955}{2}$ m, so würde er sich, wenn ein entsprechend gekrümmter Schacht vorhanden wäre, in einer Ellipse bewegen, die jede der parallelen Halbsehnen halbiert. Statt 2 kann man auch n setzen. Dann wird $\frac{1}{n}$ von jeder Halbsehne abgeschnitten. Dies ist ein in der Mechanik häufig behandeltes Problem, bei dem die Ellipsenbewegung wiederum nur Projektion der Kreisbewegung ist. Es handelt sich dabei um die Centralbewegung, bei der die Anziehung umgekehrt proportional der Entfernung ist. Sie läfst sich aus der Bewegung des Kreispendels elementar ableiten. Kleine Schwingungen des ebenen Pendels sind nichts anderes, als Projektionen der Bewegung des Kreispendels auf den Durchmesser.

Wird dem Körper die Seitengeschwindigkeit $\frac{40\,000\,000}{86\,400} = 463$ m erteilt, die ziemlich genau der äquatorialen Drehungsgeschwindigkeit der Erde entspricht, so ergiebt sich eine Ellipse von der Halbachse $\frac{463}{7955} r$. Diese würde der anfänglichen Fallbewegung in einem am Äquator befindlichen Schachte entsprechen. Denkt man sich während des Falles die Erde nachdrehend, so läfst sich das bekannte Vorauseilen nach Osten für jede Tiefe leicht berechnen. (Benzenbergs Fallversuch.)

33) Einige andere Schachtprobleme. Ein Pendel von der Schwingungsdauer $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$ würde, da g proportional der Entfernung vom Erdmittelpunkte ist, im Abstande r_1 die gröfsere Schwingungsdauer $t_1 = \sqrt{\frac{lr}{r_1}}$ erhalten. Da aber in Wirklichkeit die Schwingungsdauer bei den Versuchen abnimmt, so mufs angenommen werden, dafs anfangs die Anziehung zunimmt, weil der Kern der Erde ein weit höheres spezifisches Gewicht hat als die Aufsenschale. In der That ist die mittlere Dichte der Erde als etwa 5,6 nachgewiesen worden, während die der Oberfläche zukommende als 2 angenommen werden kann.

Angenommen der Schacht wäre mit Wasser, das als nicht zusammendrückbar betrachtet werden soll, angefüllt; wie grofs würde dann der Druck in der Nähe des Erdmittelpunktes sein? Mafsgebend ist die mittlere Stärke der Anziehung. Es handelt sich also um $\frac{860 \cdot 7500}{2} = 3\,225\,000$ Tonnen pro Quadratmeter Druckfläche, oder um 312 000 Atm., also um das Hundertfache der Spannung in einer auf 3120 Atm. beanspruchten Kruppschen Kanone. Luft würde infolge