Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

33) Einige andere Schachtprobleme

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

bis ins Unendliche wiederholt. (Vgl. Bewegung des Kolbens im Dampfcylinder.)

Giebt man dem Körper beim Beginne des Falles eine Seitengeschwindigkeit von $\frac{7955}{2}$ m, so würde er sich, wenn ein entsprechend gekrümmter Schacht vorhanden wäre, in einer Ellipse bewegen, die jede der parallelen Halbsehnen halbiert. Statt 2 kann man auch n setzen. Dann wird $\frac{1}{n}$ von jeder Halbsehne abgeschnitten. Dies ist ein in der Mechanik häufig behandeltes Problem, bei dem die Ellipsenbewegung wiederum nur Projektion der Kreisbewegung ist. Es handelt sich dabei um die Centralbewegung, bei der die Anziehung umgekehrt proportional der Entfernung ist. Sie läſst sich aus der Bewegung des Kreispendels elementar ableiten. Kleine Schwingungen des ebenen Pendels sind nichts anderes, als Projektionen der Bewegung des Kreispendels auf den Durchmesser.

Wird dem Körper die Seitengeschwindigkeit $\frac{40\,000\,000}{86\,400} = 463$ m erteilt, die ziemlich genau der äquatorialen Drehungsgeschwindigkeit der Erde entspricht, so ergiebt sich eine Ellipse von der Halbachse $\frac{463}{7955} r$. Diese würde der anfänglichen Fallbewegung in einem am Äquator befindlichen Schachte entsprechen. Denkt man sich während des Falles die Erde nachdrehend, so läſst sich das bekannte Vorauseilen nach Osten für jede Tiefe leicht berechnen. (Benzenbergs Fallversuch.)

33) Einige andere Schachtprobleme. Ein Pendel von der Schwingungsdauer $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$ würde, da g proportional der Entfernung vom Erdmittelpunkte ist, im Abstande r_1 die gröſsere Schwingungsdauer $t_1 = \sqrt{\frac{lr}{r_1}}$ erhalten. Da aber in Wirklichkeit die Schwingungsdauer bei den Versuchen abnimmt, so muſs angenommen werden, daſs anfangs die Anziehung zunimmt, weil der Kern der Erde ein weit höheres spezifisches Gewicht hat als die Auſsenschale. In der That ist die mittlere Dichte der Erde als etwa 5,6 nachgewiesen worden, während die der Oberfläche zukommende als 2 angenommen werden kann.

Angenommen der Schacht wäre mit Wasser, das als nicht zusammendrückbar betrachtet werden soll, angefüllt; wie groſs würde dann der Druck in der Nähe des Erdmittelpunktes sein? Maſsgebend ist die mittlere Stärke der Anziehung. Es handelt sich also um $\frac{860 \cdot 7500}{2} = 3\,225\,000$ Tonnen pro Quadratmeter Druckfläche, oder um 312 000 Atm., also um das Hundertfache der Spannung in einer auf 3120 Atm. beanspruchten Kruppschen Kanone. Luft würde infolge dieser Kompression, wenn das Mariottesche Gesetz bis dahin gelten würde, 417 mal so schwer sein wie Wasser, so dafs es unmöglich sein würde, sie etwa in der Taucherglocke festzuhalten. In dem Augenblicke, wo sie schwerer wird als Wasser, würde sie, kleiner und kleiner werdend, dem Mittelpunkte der Erde zustreben.

Schwieriger ist es, für eine Luftsäule im Schachte die im Mittelpunkte herrschende Spannung zu berechnen. Sie fällt infolge der Zusammendrückbarkeit der Luft weit gröfser aus als die oben berechnete. In dieser Hinsicht sei auf die Abhandlungen von Prof. Ritter über die Beschaffenheit gasförmiger Weltkörper verwiesen. Man versuche die Schachtprobleme auch für den Fall zu lösen, dafs die Dichtigkeit der Erde an der Oberfläche gleich 2 sei und nach dem Mittelpunkte hin regelmäfsig zunehme. (Vgl. Method. Lehrbuch III, Seite 129.)

34) Abplattung der Erde.

Der hypothetische Schacht findet noch anderweitige Verwertung. Er ermöglicht z. B. Untersuchungen über die Abplattung der Erde. Nach den Grundsätzen der Hydrodynamik kann man die in Fig. 24 skizzierte Schachtverbindung vom Nordpol zum Äquator hin annehmen, ohne das Problem wesentlich zu ändern. Im Polarschachte herrscht keine Centrifugalkraft, wohl aber im Äquatorialschachte. Ist das Gewicht einer Masse am Nordpol gleich mg, so ist es am Äquator, da der Einflufs der Centrifugalkraft abzuziehen ist, $mg - \frac{mv^2}{r}$. Setzt man die bekannten Gröfsen für v und r ein, so erkennt man, dafs das Gewicht um etwa $\frac{1}{290}$ abnimmt. Im Abstande x von M ist die Centrifugalkraft kleiner, entsprechend dem Faktor $\frac{x}{r}$; da aber die Schwerkraft dort in demselben Verhältnisse kleiner ist als bei A, so handelt es sich durch den ganzen Äquatorialschacht hindurch um eine Gewichtsverminderung von $\frac{1}{290}$. Hieraus schliefsen nun zahlreiche Lehrbücher darauf, dafs die äquatoriale Wassersäule, um der polaren das Gleichgewicht zu halten, um $\frac{1}{290}$ höher sein müfste. Dies ist aber falsch, da übersehen wird, dafs das mittlere Gewicht mafsgebend sein mufs. Nach dem Früheren handelt es sich um 6 450 000 cbm Wasser (im Schachte von 1 qm Querschnitt); der Druck ist aber nur 3225000 t, die Druckverminderung beträgt also nicht $\frac{6\,450\,000}{290}$ t, sondern nur $\frac{3\,225\,000}{290}$ t. Die ausgleichende Wassersäule hat somit nicht die Höhe $\frac{r}{290}$, sondern

Fig. 24.