



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung**

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

41) Potential der Kugelschale für alle Raumpunkte in graphischer Darstellung

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

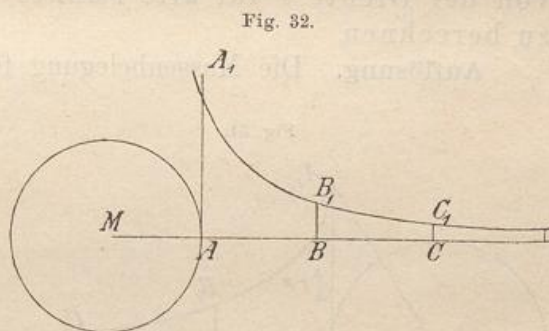
und Auftreffen auf die Kontinente aber wirkt diese Erscheinung doch hemmend auf die Erddrehung ein. Nach Berechnungen englischer Astronomen hat sich seit Hipparch den Sterntag um  $\frac{1}{81}$  Sekunde verlängert. Dies macht allerdings auf das Jahr nur gegen 4 Sekunden, auf das Jahrhundert also etwa  $\frac{1}{9}$  Stunde aus, veranlaßt aber beim Rückwärtsberechnen der Sonnen- und Mondfinsternisse erhebliche Unterschiede. So gering dieser Unterschied ist, so groß ist der Einfluss, wenn man ihn in technischen Maßen berechnet, denn in solchen ausgedrückt, ist die Energie der sich drehenden Erde von außerordentlicher Größe, nämlich  $28\,388 \cdot 10^{21}$  Metertonnen =  $28\,388 \cdot 10^{24}$  mkg. Der Energieverlust seit Hipparch beträgt also  $81\,349 \cdot 10^{17}$  mkg. Nach 7 Millionen Jahren würde bei fortgesetztem gleich großem Verluste die Drehungs-Energie erschöpft sein. Sekundlich gehen  $12\,918 \cdot 10^7$  mkg verloren, was  $17\,225 \cdot 10^5$  Pferdestärken bedeutet, mit denen der Mond langsam aber sicher der Umdrehung der Erde entgegenarbeitet. (Vgl. Ing. Math. Band I. Seite 124.)

Wer sich für die Rückwärtsberechnungen der Sonnen- und Mondfinsternisse und ihre Bedeutung für die Festlegung weltgeschichtlicher Ereignisse interessiert, sei wieder auf die Astronomische Chronologie von Dr. Wislicenus, Leipzig bei Teubner, 1895, aufmerksam gemacht.

Nachdem so auf einige interessante Anwendungen der Potentialtheorie hingewiesen ist, kehren wir zur Kugelschale, Vollkugel und Hohlkugel zurück und stellen ihre Gravitations- und Potentialkurven für den ganzen Raum fest.

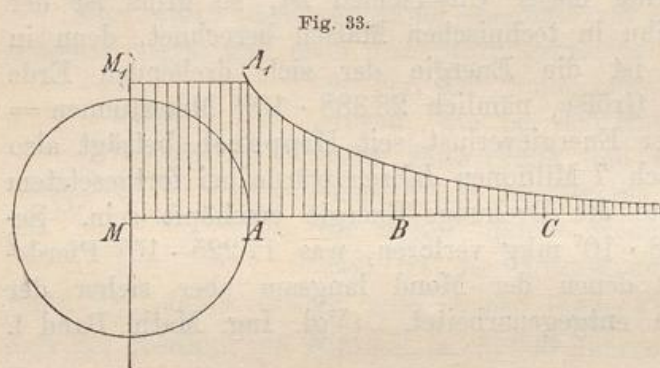
41) **Aufgabe.** Das Potential einer homogenen Kugelschale von der Dichte 1 für alle Punkte des Raumes zu untersuchen.

**Auflösung.** Die Massenbelegung für die Flächeneinheit sei gleich eins, der angezogene Massenpunkt habe ebenfalls die Masse eins. Dann ist für äußere Punkte, wenn  $\varrho$  der Halbmesser der Kugel,  $x$  der Abstand vom Mittelpunkt  $M$  ist, die Anziehung  $\frac{4e^2\pi}{x^2}$ , die Arbeit von der Stelle  $x$  bis ins Unendliche hat also nach Nr. 17 den Betrag



$$\frac{\infty}{x} F = 4\rho^2\pi \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{4\rho^2\pi}{x}.$$

Der Potentialwert für  $x = \infty$  ist Null, er wächst bei der Annäherung bis  $A$  zur Größe  $\frac{4\rho^2\pi}{\rho} = 4\rho\pi$  an. Gelangt der Punkt bei  $A$  durch eine Öffnung ins Innere der Kugelschale, so nimmt der

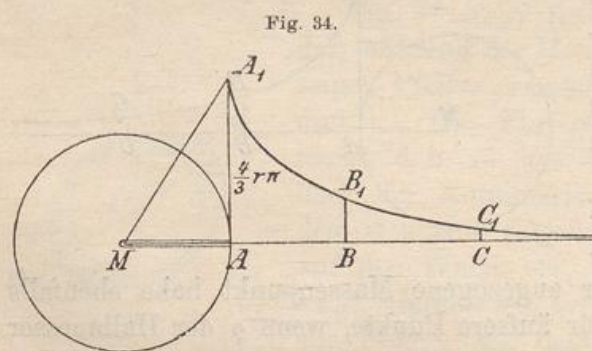


Potentialwert nicht mehr zu, da dort kein Arbeitsaufwand zur Fortbewegung von  $M$  nötig ist. Die Arbeit für die Bewegung von  $M$  bis  $\infty$  ist also ebenso groß wie die für den Weg von  $A$  bis  $\infty$ . Stellt man für jeden Punkt den Betrag des Potentials dar, so hat

man von  $M$  bis  $A$  stets dieselbe Höhe  $4\rho\pi$ , Fig. 33, dagegen im Abstände  $MB = 2\rho$  die Höhe  $\frac{4\rho\pi}{2}$ , im Abstände  $MC = 3\rho$  die Höhe  $\frac{4\rho\pi}{3}$  u. s. w. Die Diagrammkurve des Potentialwertes ist eine gleichseitige Hyperbel.

42) **Aufgabe.** Das Potential der homogenen Vollkugel von der Dichte 1 für alle Punkte des Äußeren und Inneren zu berechnen.

**Auflösung.** Die Massenbelegung für die Raumeinheit sei gleich



eins, der angezogene Punkt habe die Masse eins, die Gravitationskonstante sei eins, dann ist die Anziehung für außerhalb liegende Punkte in der Entfernung  $x$  gleich  $\frac{4}{3}r^3\pi\frac{1}{x^2}$ , so daß die Diagrammkurve

$$y = \frac{4}{3}r^3\pi x^{-2},$$

Fig. 34, zu untersuchen ist. An der Stelle  $A$  ist ihre Höhe  $AA_1 = \frac{4}{3}r^3\pi r^{-2} = \frac{4}{3}r\pi$ , im Abstände  $MB = 2r$  handelt es sich