Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

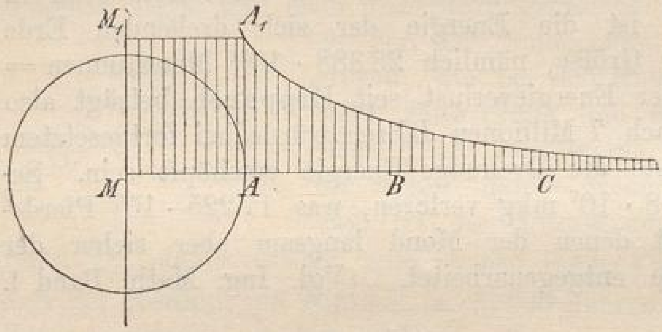
Leipzig, 1898

42) Potential der Vollkugel für alle Raumpunkte

$$\overset{\infty}{\underset{x}{F}} = 4\varrho^2\pi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{4\varrho^2\pi}{x}.$$

Der Potentialwert für $x = \infty$ ist Null, er wächst bei der Annäherung bis A zur Gröſse $\frac{4\varrho^2\pi}{\varrho} = 4\varrho\pi$ an. Gelangt der Punkt bei A durch eine Öffnung ins Innere der Kugelschale, so nimmt der Potentialwert nicht mehr zu, da dort kein Arbeitsaufwand zur Fortbewegung von M nötig ist. Die Arbeit für die Bewegung von M bis ∞ ist also ebenso groſs wie die für den Weg von A bis ∞. Stellt man für jeden Punkt den Betrag des Potentials dar, so hat man von M bis A stets dieselbe Höhe $4\varrho\pi$, Fig. 33, dagegen im Abstande $MB = 2\varrho$ die Höhe $\frac{4\varrho\pi}{2}$, im Abstande $MC = 3\varrho$ die Höhe $\frac{4\varrho\pi}{3}$ u. s. w. Die Diagrammkurve des Potentialwertes ist eine gleichseitige Hyperbel.

Fig. 33.



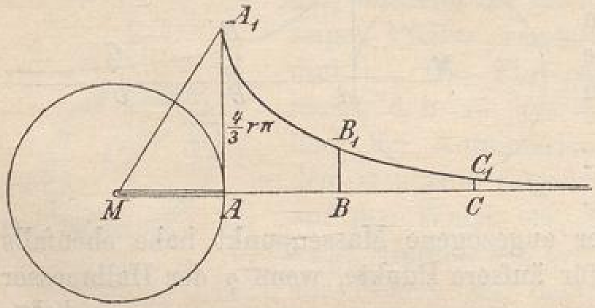
42) **Aufgabe.** Das Potential der homogenen Vollkugel von der Dichte 1 für alle Punkte des Äuſseren und Inneren zu berechnen.

Auflösung. Die Massenbelegung für die Raumeinheit sei gleich eins, der angezogene Punkt habe die Masse eins, die Gravitationskonstante sei eins, dann ist die Anziehung für auſserhalb liegende Punkte in der Entfernung x gleich $\frac{4}{3}r^3\pi\frac{1}{x^2}$, so daſs die Diagrammkurve

$$y = \tfrac{4}{3}r^3\pi x^{-2},$$

Fig. 34, zu untersuchen ist. An der Stelle A ist ihre Höhe $AA_1 = \frac{4}{3}r^3\pi r^{-2} = \frac{4}{3}r\pi$, im Abstande $MB = 2r$ handelt es sich

Fig. 34.



um den vierten Teil, bei $MC = 3r$ um den neunten Teil dieser Höhe u. s. w. Die Arbeit von x bis ∞ ist nach Nr. 17

$$\overset{\infty}{\underset{x}{F}} = \tfrac{4}{3} r^3 \pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right) = \tfrac{4}{3} r^3 \pi \cdot \frac{1}{x},$$

und dies ist der Potentialwert für die Entfernung x. Geht man von ∞ bis A, so wächst der Potentialwert bis zur Gröfse $\frac{4}{3} r^3 \pi \frac{1}{r} = \frac{4}{3} r^2 \pi$ an.

Tritt nun der Punkt unter Anwendung eines engen Schachtes in das Innere ein, so nimmt der Potentialwert nach einem anderen Gesetze zu, denn das Diagramm hat im Innern von x bis r nach der Trapezformel den Inhalt

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} r\pi + \tfrac{4}{3} x\pi\right)(r - x) = \tfrac{2}{3}\pi\,(r^2 - x^2),$$

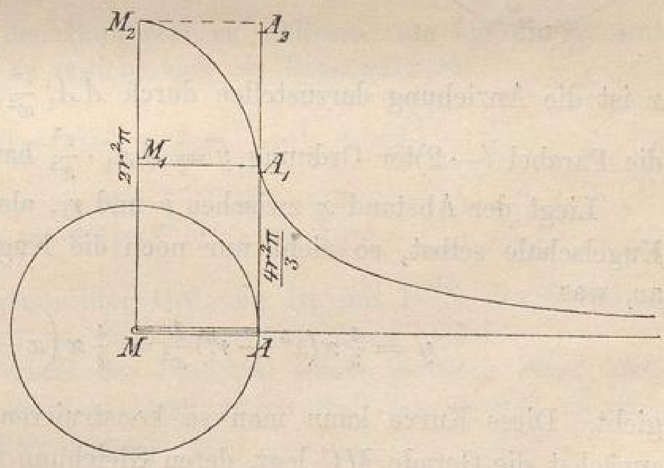
von x im Innern bis ∞ ist also die Hebungsarbeit.

$$\tfrac{2}{3}\pi (r^2 - x^2) + \tfrac{4}{3} r^2 \pi = 2\pi\left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right).$$

Im Mittelpunkte, d. h. für x gleich Null, ist der Potentialwert am gröfsten, nämlich gleich $2r^2\pi$.

Die graphische Darstellung des Potentialwertes, Fig. 35, führt rechts von $AA_1 = \frac{4}{3} r^2 \pi$ auf eine gleichseitige Hyperbel. Links davon handelt es sich um eine dem Rechteck $M_1 A_1 A_2 M_2$ eingezeichnete Parabel, deren Scheitel in M_2 liegt.

Fig. 35.



Beispiel. Die letzte Aufgabe über die Vollkugel zeigte unter anderm, dafs bei der Kugel vom Radius eins mit der Dichte eins die Masseneinheit für die Fortschaffung von der Oberfläche bis ins Unendliche die Arbeit $\frac{4}{3} r^2 \pi$ z. B. in Tonnen verlangte. Dabei war $k = 1$ angenommen, während in Wahrheit $k = \frac{3g}{4r\pi p}$ ist. Bei der Erdkugel ist statt der Dichte 1 die Dichte 5,56 zu nehmen, ferner wiegt die

Masseneinheit der Technik im Tonnensystem 9,81 t, genauer g t. Der Arbeitsaufwand wird also in Wahrheit

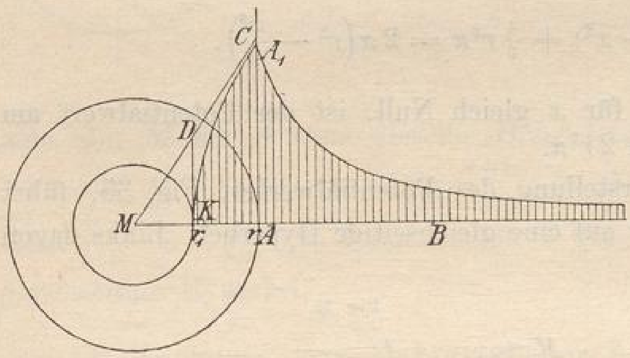
$$\frac{4\,r^2\pi}{3}\cdot 5{,}56\cdot\frac{3\,g}{4\,r\pi\cdot 5{,}56} = rg \text{ Tonnen.}$$

Dies ist also das $g$fache von dem, was die erste Behandlung dieser Aufgabe gegeben hatte; das Ergebnis ist richtig, denn hier wird die $g$fache Last gehoben.

An diesem Beispiele erkennt man, wie man die Ergebnisse der Potentialtheorie in die technische Betrachtungsweise überführt.

43) **Aufgabe.** Das Potential der homogenen Hohlkugel mit den Radien r und r_1 und der Dichte 1 für alle Punkte des Raumes zu untersuchen.

Fig. 36.



Auflösung. An der Oberfläche ist die Anziehung auf die Masseneinheit

$$\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - r_1^3\right)\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Diese Gröſse werde durch die beliebige Gerade AA_1, Fig. 36, dargestellt. In der gröſseren Entfernung x ist die Anziehung darzustellen durch $AA_1\,\frac{r^2}{x^2}$, so daſs es sich um die Parabel (-2)ter Ordnung $y = AA_1\cdot\frac{r^2}{x^2}$ handelt.

Liegt der Abstand x zwischen r und r_1, also der Punkt x in der Kugelschale selbst, so zieht nur noch die Kugelschale $\frac{4}{3}\pi\left(x^3 - r_1^3\right)$ an, was

$$y = \frac{4}{3}\pi\left(x^3 - r_1^3\right)\frac{1}{x^2} = \frac{4}{3}\pi\left(x - \frac{r_1^3}{x^2}\right)$$

giebt. Diese Kurve kann man so konstruieren, daſs man durch M zunächst die Gerade MC legt, deren Gleichung $y = \frac{4}{3}\pi x$ ist, so daſs $AC = \frac{4}{3}\pi r$ ist. Von der Ordinate dieser Geraden ist für jeden Abstand x die Ordinate der Kurve $y = \frac{4}{3}\pi r_1^3\cdot\frac{1}{x^2}$, die eine Parabel von Ordnung (-2) ist, abzuziehen. MC ist Asymptote der eigentlichen Kurve, die durch K und A_1 geht, bei A_1 aber nicht fortgesetzt wird.