Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

43) Potential der koncentrischen Hohlkugel für alle Raumpunkte

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Masseneinheit der Technik im Tonnensystem 9,81 t, genauer g t. Der Arbeitsaufwand wird also in Wahrheit

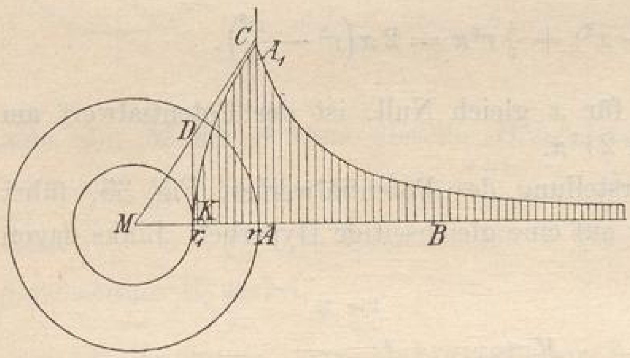
$$\frac{4r^2\pi}{3}\cdot 5{,}56\cdot\frac{3g}{4r\pi\cdot 5{,}56} = rg \text{ Tonnen.}$$

Dies ist also das $g$fache von dem, was die erste Behandlung dieser Aufgabe gegeben hatte; das Ergebnis ist richtig, denn hier wird die $g$fache Last gehoben.

An diesem Beispiele erkennt man, wie man die Ergebnisse der Potentialtheorie in die technische Betrachtungsweise überführt.

43) **Aufgabe.** Das Potential der homogenen Hohlkugel mit den Radien r und r_1 und der Dichte 1 für alle Punkte des Raumes zu untersuchen.

Fig. 36.



Auflösung. An der Oberfläche ist die Anziehung auf die Masseneinheit

$$\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - r_1^3\right)\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Diese Gröſse werde durch die beliebige Gerade AA_1, Fig. 36, dargestellt. In der gröſseren Entfernung x ist die Anziehung darzustellen durch $AA_1\,\frac{r^2}{x^2}$, so daſs es sich um die Parabel (-2)ter Ordnung $y = AA_1\cdot\frac{r^2}{x^2}$ handelt.

Liegt der Abstand x zwischen r und r_1, also der Punkt x in der Kugelschale selbst, so zieht nur noch die Kugelschale $\frac{4}{3}\pi\left(x^3 - r_1^3\right)$ an, was

$$y = \frac{4}{3}\pi\left(x^3 - r_1^3\right)\frac{1}{x^2} = \frac{4}{3}\pi\left(x - \frac{r_1^3}{x^2}\right)$$

giebt. Diese Kurve kann man so konstruieren, daſs man durch M zunächst die Gerade MC legt, deren Gleichung $y = \frac{4}{3}\pi x$ ist, so daſs $AC = \frac{4}{3}\pi r$ ist. Von der Ordinate dieser Geraden ist für jeden Abstand x die Ordinate der Kurve $y = \frac{4}{3}\pi r_1^3\cdot\frac{1}{x^2}$, die eine Parabel von Ordnung (-2) ist, abzuziehen. MC ist Asymptote der eigentlichen Kurve, die durch K und A_1 geht, bei A_1 aber nicht fortgesetzt wird.

Hat man bei D von der Asymptote aus DK gezogen, so hat man in der Entfernung $2\,MD$ nach unten $\frac{1}{4}DK$, in $3\,MD$ dagegen $\frac{1}{9}DK$ als Senkrechte zu ziehen. Im Hohlraume endlich ist die Anziehung gleich Null, dort also das Potential konstant.

Der Potentialwert für jeden Abstand $x > r$ ist gegeben durch

$$y = \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)\frac{1}{x};$$

im Unendlichen ist er Null, nach dem Gesetze der gleichseitigen Hyperbel wächst er von dort bis zum Rande hin an auf

$$\frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)\frac{1}{r}.$$

Liegt x zwischen r_1 und r, so handelt es sich um das von der Kurve

$$y = \frac{4}{3}\pi\left(x - \frac{r_1^3}{x^2}\right)$$

begrenzte Arbeitsdiagramm, und zwar für die Strecke von x bis r. Nach der Schichtenformel erhält man die Fläche bezw. Arbeit

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r^2}{2} - r_1^3\frac{r^{-1}}{-1}\right) - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x^2}{2} - r_1^3\frac{x^{-1}}{-1}\right),$$

oder

$$\frac{4}{3}\pi\left[\frac{r^2 - x^2}{2} + r_1^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)\right].$$

Dazu hat man den Randwert zu addieren, um auf die Gesamtarbeit zu kommen. Es ergiebt sich als Potentialwert:

$$y = \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_1^3)\frac{1}{r} + \frac{4}{3}\pi\left[\frac{r^2 - x^2}{2} + r_1^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{r_1^3}{x}\right].$$

Diese Parabel gemischter Ordnung ist mit Hilfe der Rechnung leicht zu konstruieren, was dem Leser überlassen bleibe.

Ist $x = r_1$, so erhält das Potential seinen gröſsten Wert; denn im Hohlraume, wo die Anziehung gleich Null ist, wächst es nicht mehr. Der gröſste Potentialwert ist

$$\frac{4}{3}\pi\left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{r_1^2}{2} - \frac{r_1^3}{r_1}\right] = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{2}r_1^2\right],$$

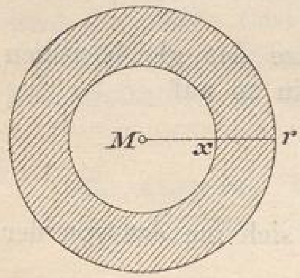
oder endlich

$$2\pi(r^2 - r_1^2).$$

Für wirkliche Verhältnisse ist die Gravitationskonstante als Faktor beizufügen und im übrigen wie vorher zu rechnen.

44) **Aufgabe.** Das Selbstpotential der homogenen Kugel zu bestimmen. [Es handelt sich darum, die Arbeit zu berechnen, die nötig ist, um die einzelnen koncentrischen Schichten der Kugel der Reihe nach abzutragen und in unendliche Entfernung zu bringen.]

Fig. 37.



Auflösung. Angenommen, die Abtragung bis x, Fig. 37, sei schon erfolgt, dann ist nur noch eine Kugel vom Radius x übrig, bei der die Arbeit $\frac{4}{3}x^2\pi$ erforderlich ist, um die Masseneinheit ins Unendliche zu entfernen. Die koncentrische Schicht $4x^2\pi$ (von der beliebig klein zu denkenden Dicke eins) erfordert also die Arbeit

$$\frac{4}{3}x^2\pi \cdot 4x^2\pi = \frac{16}{3}x^4\pi^2.$$

Handelt es sich aber für diese koncentrische Schicht um den Ausdruck

$$q_x = \frac{16\pi^2}{3}x^4,$$

so ist für die ganze Kugel von o bis r nach der Schichtenformel der Ausdruck

$$\frac{16\pi^2}{3} \cdot \frac{r^5}{5}$$

zu nehmen. Das Selbstpotential hat also den Wert $\frac{16\pi^2 \cdot r^5}{15}$. Führt man die Masse $m = \frac{4}{3}r^3\pi$ ein, so handelt es sich zugleich um $\frac{3}{5}\frac{m^2}{r}$.

Genau ebenso viel Anziehungsarbeit wird geleistet, wenn der Körper durch allmähliches Zusammenstürzen oder Zusammenziehen kosmischer Massen entsteht, die ursprünglich über den unendlichen Raum verbreitet waren oder wenigstens einen sehr grofsen Raum einnahmen.

45) **Aufgabe.** Für alle Massenpunkte der homogenen Kugel die Potentialwerte zu bestimmen und ihre Summe zu bilden.

Auflösung. An der Stelle x im Innern ist nach einer früheren Aufgabe das Potential der Kugel in Bezug auf die Masseneinheit

$$2\pi\left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right),$$