Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

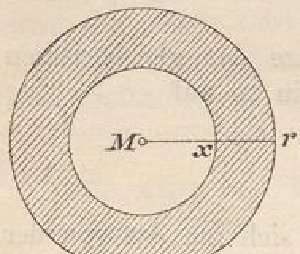
Leipzig, 1898

45) Summe der Potentialwerte aller Massenpunkte einer Vollkugel

Für wirkliche Verhältnisse ist die Gravitationskonstante als Faktor beizufügen und im übrigen wie vorher zu rechnen.

44) **Aufgabe.** Das Selbstpotential der homogenen Kugel zu bestimmen. [Es handelt sich darum, die Arbeit zu berechnen, die nötig ist, um die einzelnen koncentrischen Schichten der Kugel der Reihe nach abzutragen und in unendliche Entfernung zu bringen.]

Fig. 37.



Auflösung. Angenommen, die Abtragung bis x, Fig. 37, sei schon erfolgt, dann ist nur noch eine Kugel vom Radius x übrig, bei der die Arbeit $\frac{4}{3}x^2\pi$ erforderlich ist, um die Masseneinheit ins Unendliche zu entfernen. Die koncentrische Schicht $4x^2\pi$ (von der beliebig klein zu denkenden Dicke eins) erfordert also die Arbeit

$$\frac{4}{3}x^2\pi \cdot 4x^2\pi = \frac{16}{3}x^4\pi^2.$$

Handelt es sich aber für diese koncentrische Schicht um den Ausdruck

$$q_x = \frac{16\pi^2}{3}x^4,$$

so ist für die ganze Kugel von o bis r nach der Schichtenformel der Ausdruck

$$\frac{16\pi^2}{3}\cdot\frac{r^5}{5}$$

zu nehmen. Das Selbstpotential hat also den Wert $\frac{16\pi^2 \cdot r^5}{15}$. Führt man die Masse $m = \frac{4}{3}r^3\pi$ ein, so handelt es sich zugleich um $\frac{3}{5}\frac{m^2}{r}$.

Genau ebenso viel Anziehungsarbeit wird geleistet, wenn der Körper durch allmähliches Zusammenstürzen oder Zusammenziehen kosmischer Massen entsteht, die ursprünglich über den unendlichen Raum verbreitet waren oder wenigstens einen sehr großen Raum einnahmen.

45) **Aufgabe.** Für alle Massenpunkte der homogenen Kugel die Potentialwerte zu bestimmen und ihre Summe zu bilden.

Auflösung. An der Stelle x im Innern ist nach einer früheren Aufgabe das Potential der Kugel in Bezug auf die Masseneinheit

$$2\pi\left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right),$$

also in Bezug auf die entsprechende koncentrische Schicht $4x^2\pi$ gleich

$$q_x = 2\pi\left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right)4x^2\pi = 8\pi^2\left(r^2x^2 - \frac{x^4}{3}\right).$$

Nach der Schichtenformel giebt dies für die ganze Kugel

$$8\pi^2\left(r^2\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{15}\right) = \frac{32\pi^2r^5}{15}.$$

Führt man die Masse $\frac{4}{3}r^3\pi$ ein, so hat man $\frac{6}{5}\frac{m^2}{r}$.

Die Aufgabe läſst sich folgendermaſsen deuten: Man denke sich zwischen die Moleküle der Kugel neue Moleküle so eingeschoben, daſs gewissermaſsen in der Kugel noch eine zweite Kugel derselben Art liegt. Diese hypothetische zweite Kugel denke man sich mit einem Male in unendliche Entfernung gebracht und berechne die dazu nötige Arbeit. Jedes einzelne Teilchen der zweiten Kugel erfordert offenbar dieselbe Arbeit zum Wegschaffen wie jedes einzelne Teilchen der ersten, d. h. denselben Potentialwert.

Dies klärt zugleich darüber auf, warum bei dieser Aufgabe das Ergebnis doppelt so groſs ist wie bei der vorhergehenden. Denkt man sich nämlich die Doppelkugel durch allmähliche Vereinigung kosmischer Massen entstanden, so ergiebt sich das vierfache Selbstpotential wie bei der einfachen Kugel, denn an Stelle jeder Anziehung von Einzelmassen $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ darf man sich dabei gesetzt denken:

$$\frac{(2m_1)(2m_2)}{r^2} = 4\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

was für den ganzen Verlauf gilt. Entfernt man nun die Teilchen der zweiten Kugel einzeln ins Unendliche (nicht, wie vorher, zugleich), so ist, weil das Selbstpotential P der ersten Kugel unangetastet bleibt, die Arbeit $3P$ zu leisten. Diese besteht aus zwei Teilen, aus dem Auflösen des Selbstpotentials der zweiten Kugel, was $1P$ giebt, und dem Entfernen der zweiten Kugel von der ersten, was dem Reste $2P$, also dem Doppelten des Resultats der Aufgabe 44 entsprechen muſs. Damit ist der Zusammenhang beider Beispiele ohne Rechnung aufgeklärt.

46) Anwendung des Selbstpotentials auf kosmische Verhältnisse.

Helmholtz hat eine Reihe von Problemen, die mit der Bildung des Sonnensystems und der Entstehung und Erhaltung der Sonnenwärme zusammenhängen, mit Hilfe des Selbstpotentials in einfacher Weise gelöst.