UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

46) Anwendung des Selbstpotentials auf kosmische Verhältnisse

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Visual Library

also in Bezug auf die entsprechende koncentrische Schicht $4x^2\pi$ gleich

$$q_x = 2\pi\left(r^2 - \frac{x^2}{3}\right)4x^2\pi = 8\pi^2\left(r^2x^2 - \frac{x^4}{3}\right).$$

Nach der Schichtenformel giebt dies für die ganze Kugel

$$8\pi^2\left(r^2\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{15}\right) = \frac{32\pi^2 r^5}{15}.$$

Führt man die Masse $\frac{4}{3}r^3\pi$ ein, so hat man $\frac{6}{5}\frac{m^2}{r}$.

Die Aufgabe läfst sich folgendermafsen deuten: Man denke sich zwischen die Moleküle der Kugel neue Moleküle so eingeschoben, dafs gewissermafsen in der Kugel noch eine zweite Kugel derselben Art liegt. Diese hypothetische zweite Kugel denke man sich mit einem Male in unendliche Entfernung gebracht und berechne die dazu nötige Arbeit. Jedes einzelne Teilchen der zweiten Kugel erfordert offenbar dieselbe Arbeit zum Wegschaffen wie jedes einzelne Teilchen der ersten, d. h. denselben Potentialwert.

Dies klärt zugleich darüber auf, warum bei dieser Aufgabe das Ergebnis doppelt so grofs ist wie bei der vorhergehenden. Denkt man sich nämlich die Doppelkugel durch allmähliche Vereinigung kosmischer Massen entstanden, so ergiebt sich das vierfache Selbstpotential wie bei der einfachen Kugel, denn an Stelle jeder Anziehung von Einzelmassen $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ darf man sich dabei gesetzt denken:

$$\frac{(2m_1)(2m_2)}{r^2} = 4\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

was für den ganzen Verlauf gilt. Entfernt man nun die Teilchen der zweiten Kugel einzeln ins Unendliche (nicht, wie vorher, zugleich), so ist, weil das Selbstpotential P der ersten Kugel unangetastet bleibt, die Arbeit $3P$ zu leisten. Diese besteht aus zwei Teilen, aus dem Auflösen des Selbstpotentials der zweiten Kugel, was $1P$ giebt, und dem Entfernen der zweiten Kugel von der ersten, was dem Reste $2P$, also dem Doppelten des Resultats der Aufgabe 44 entsprechen mufs. Damit ist der Zusammenhang beider Beispiele ohne Rechnung aufgeklärt.

46) Anwendung des Selbstpotentials auf kosmische Verhältnisse.

Helmholtz hat eine Reihe von Problemen, die mit der Bildung des Sonnensystems und der Entstehung und Erhaltung der Sonnenwärme zusammenhängen, mit Hilfe des Selbstpotentials in einfacher Weise gelöst.

Ist M die Sonnenmasse, R ihr Radius, so ist das Selbstpotential der Sonne $\frac{3}{5}\frac{M^2}{R}$. Für die Wirklichkeit ist nun die Gravitationskonstante $k = \frac{gr^2}{m}$ (wo r und m den Radius und die Masse der Erde bedeuten) als Faktor beizufügen, was $\frac{3}{5}\frac{M^2}{R}\frac{gr^2}{m}$ giebt. Rechnet man in Metern und mit der technischen Masseneinheit des Kilogrammsystems (die 9,81 kg wiegt), um die Wärmeeinheit gleich 425 mkg setzen zu können, so sind für die Temperaturerhöhung 1°C (bei Kapazität eins) für jede Masseneinheit 9,81 · 425 mgk erforderlich. Man erhält die Temperaturerhöhung mittels der Division durch diesen Ausdruck, also

$$t = \frac{3}{5}\frac{M}{R}\frac{r^2}{425\,m} = \sim \frac{0{,}6 \cdot (355\,000\,m)r^2}{Rm425} = \sim \frac{0{,}6\,r^2 \cdot 355\,000}{425\,R}.$$

Setzt man hier $r = 860 \cdot 7500\,m$, $R = 95\,000 \cdot 7500\,m$, so bekommt man etwa 29000000°C, was mit dem Helmholtzschen Ergebnis zusammenstimmt, sobald man dort dieselben Erfahrungswerte benutzt. Bei geringerer Kapazität entsteht eine entsprechend höhere Temperatur. Die letztere würde wirklich entstehen, wenn der Sonnenkörper keine Ausstrahlung gehabt hätte. Durch die Ausstrahlung kann ein Abkühlungszustand eingetreten sein. Dies ist aber nicht als durchaus notwendig anzunehmen, wie sich aus folgendem ergiebt.

Durch fortgesetzte Zusammenziehung der Sonne wird neue Wärme frei. Zusammenziehung des „Nebelballes" auf den Radius R giebt das Selbstpotential $\frac{3}{5}\frac{M^2}{R}\frac{gr^2}{m}$, Zusammenziehung auf den kleineren Radius R_1 das gröfsere Selbstpotential $\frac{3}{5}\frac{M^2}{R_1}\frac{gr^2}{m}$. Beide verhalten sich wie $\frac{R_1}{R}$, und in diesem Mafse vergröfsert sich die entstehende Temperatur. Der Temperaturunterschied entspricht der durch die wachsende Zusammenziehung entstandenen Wärme. An der Hand dieses Gedankenganges hat Helmholtz gezeigt, wie eine Zusammenziehung um zehn Meilen die jetzige Sonnenausstrahlung auf 2309 Jahre decken könnte. Die Rechnung soll unten durchgeführt werden.

Nun sind drei Fälle möglich: 1) Ist die Ausstrahlung stärker als der durch Zusammenziehung entstehende Wärmeersatz, so kühlt sich die Sonne ab; 2) ist sie schwächer, so erhitzt sich die Sonne; 3) ist beides gleichwertig, so bleibt die Sonnentemperatur sich gleich. Was in Wirklichkeit der Fall ist, kann nicht ohne weiteres entschieden werden, da die Ausstrahlung durchaus nicht proportional der Temperatur zu sein braucht. Man bedenke, dafs die Zusammenziehung auf den halben Radius die doppelte Wärmemenge giebt, während die ausstrahlende Oberfläche auf den vierten Teil herabgesetzt wird. Die

Ausstrahlungsfähigkeit müfste also erheblich stärker wachsen als die Temperatur, wenn Gleichgewicht der letzteren herrschen soll. Die zunehmende Erhitzung ist sogar wahrscheinlicher als die Abkühlung. Es handelt sich hier um einen kritischen Punkt der allgemein verbreiteten Vorstellungsweise, die eine Erhitzung des Sonnenkörpers nur für die Anfangszeiten ihrer Kosmogenie gelten läfst.

Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes mögen einige genauere Rechnungsergebnisse nach anderer Berechnungsmethode beigefügt werden, wobei der Radius der Sonne gleich 95 000 Meilen, ihre Dichtigkeit gleich 1,38, die auf ihrer Oberfläche wirkende Schwerkraft gleich dem 28,3 fachen von der auf der Erdoberfläche geltenden gesetzt werde.

Man denke sich die Sonne aus lauter koncentrischen Schichten von der Dicke 1 Meter bestehend. Eine nach der anderen soll abgenommen und in unendliche Entfernung von der Sonne gebracht werden. Die nötige Arbeit ist zu berechnen, dabei aber zu beachten, dafs nach Wegnahme jeder Schicht die Anziehung der Sonnenmasse geringer wird. Wird z. B. der Radius r_1 auf den Wert r reduziert, so wird die anziehende Masse im Verhältnis $\frac{r^3}{r_1^3}$ vermindert; da aber die Entfernung der Oberfläche vom Mittelpunkt jetzt geringer ist, wird die Wirkung der Masseneinheit im Verhältnis $\frac{r_1^2}{r^2}$ verstärkt (Gravitationsgesetz). Beide Gründe zusammen geben das $\frac{r^3}{r_1^3} \cdot \frac{r_1^2}{r^2}$fache der ursprünglichen Anziehungskraft, d. h. das $\frac{r}{r_1}$fache

Die zum Radius r gehörige Massenschicht hat den Inhalt $4\,r^2\pi \cdot 1$, nimmt man also die Raumeinheit Sonnenmasse für die Dichte 1 zugleich als Masseneinheit an, so ist die Masse der Schicht $4\,r^2\pi \cdot 1{,}38$. Ist nun r in Metern gegeben, so würde sie an der Erdoberfläche ebenso viele Tonnen wiegen, an der Sonnenoberfläche dagegen das 28,3fache, an der Oberfläche der Kugel mit Radius r endlich das $28{,}3\frac{r}{r_1}$fache, d. h.

$$\frac{1{,}38 \cdot 4 \cdot 28{,}3\, r^2\pi \cdot r}{r_1} \text{ Tonnen}$$

oder

$$\frac{1{,}38 \cdot 4000 \cdot 28{,}3 \cdot r^3\pi}{r_1} \text{kg.}$$

Das aufserhalb der soeben betrachteten Kugel befindliche der Sonnenmasse war bereits als abgetragen gedacht. Um also diese p kg in unendliche Entfernung zu heben, braucht man nach obiger Theorie die Arbeit

$$A = pr = \frac{1{,}38 \cdot 4000 \cdot 28{,}3\, r^4 \pi}{r_1} \text{ mkg.}$$

Um nun die gesamte Sonnenmasse schichtenweise zu entfernen, braucht man nach der Summen- oder Schichtenformel (Ing. Math. I Nr. 171) die Arbeit

$$A = \frac{4000 \cdot 1{,}38 \cdot 28{,}3 \cdot r_1^5 \pi}{5\, r_1} \text{ mkg} = \frac{4000 \cdot 1{,}38 \cdot 28{,}3 \cdot \pi \cdot r_1^4}{5} \text{ mkg.}$$

Division durch 425 giebt die entsprechende Anzahl von Wärmeeinheiten.

Läfst man nun das Umgekehrte stattfinden, d. h. läfst man die einzelnen entfernten Schichten aus unendlicher Entfernung wieder herabfallen (z. B. jede erst dann, nachdem die vorhergehende auf der Sonne angelangt ist), so wird bei voller Umsetzung der entstehenden Arbeitsfähigkeit in Wärme genau dieselbe Anzahl von Wärmeeinheiten erzeugt, nämlich

$$W = \frac{4000 \cdot 1{,}38 \cdot 28{,}3 \cdot r_1^4 \pi}{5 \cdot 425} \text{ W.-E.}$$

Zum Schlufs ist die Masse der Sonne wieder auf

$$1000 \cdot \tfrac{4}{3} r_1^3 \pi \cdot 1{,}38 \text{ kg}$$

angewachsen. Auf jedes kg der Masse kommen also

$$W_1 = \frac{4000 \cdot 1{,}38 \cdot 28{,}3 \cdot r_1^4 \pi}{5 \cdot 425 \cdot \frac{4000}{3} r_1^3 \pi \cdot 1{,}38} = \frac{84{,}9\, r_1}{2125} \text{ W.-E.}$$

Setzt man hier $r_1 = 95\,000 \cdot 7500$ m, so ergiebt sich für jedes kg die Wärmemenge

$$W_1 = 28\,466\,000 \text{ W.-E.}$$

Wäre diese Wärme in der Sonne geblieben, und hätte die Sonnenmasse die Kapazität des Wassers, so würde also die durchschnittliche Sonnenwärme

$$28\,466\,000^0 \text{ C}$$

betragen.

(Helmholtz berechnet nach seiner Methode 28 611 000° C, was nur wenig abweicht, und zwar infolge anderer Annahme der Konstanten).

Zieht sich nun die Sonne von dem angenommenen Radius r_1 auf r_2 zusammen, so entsteht nach obigem die $\frac{r_1}{r_2}$fache Wärmemenge. Handelt es sich um eine Verkleinerung des Sonnenradius um 10 Meilen, so erhält man für den Bildungsprozeſs dieser kleineren Sonne auf jedes kg

$$W_2 = \frac{28\,466\,000 \cdot 95\,000}{94\,990} = 28\,469\,000 \text{ W.-E.}$$

Dies giebt für die gesamte Sonnenmasse ein Mehr von $62\,724 \cdot 10^{29}$ W.-E.

Findet also eine solche, für das unbewaffnete Auge nicht einmal sichtbare, Kontraktion statt (sie beträgt ja nur $\frac{1}{9500}$, also etwa $\frac{1}{10\,000}$ des Durchmessers), so läſst es sich wohl erklären, daſs die Sonne in historischen Zeiten eine Abnahme der Ausstrahlung nicht beobachten lieſs. Man kann geradezu fragen, auf wie viele Jahre hinaus die soeben berechnete Wärmemenge imstande sein würde, die jetzige Ausstrahlung zu decken. Dies soll berechnet werden.

Mayer versteht unter Groſskalorie die Wärmemenge, die nötig ist, um eine Kubikmeile Wasser um 1^0 C zu erwärmen; sie ist also gleich $40\,854 \cdot 10^{10}$ W.-E. Nach den Messungen von Pouillet strahlt der ganze Sonnenkörper in 1 Min. $1265 \cdot 10^7$ Groſskalorien aus; die jährliche Ausstrahlung in gewöhnlichen Wärmeeinheiten beträgt also:

$$40\,854 \cdot 1265 \cdot 144 \cdot 365 \cdot 10^{18} = 27\,163 \cdot 10^{26} \text{ W.-E.}$$

Dividiert man das obige Ergebnis durch dieses, so erhält man:

$$\frac{62\,724 \cdot 10^{29}}{27\,163 \cdot 10^{26}} = 2{,}3091 \cdot 10^3 = 2309{,}1 \text{ Jahre.}$$

Auf so lange Zeit wäre also die Sonnenausstrahlung durch jene unscheinbare Kontraktion gedeckt.

Erfolgt die genannte Kontraktion in kürzerer Zeit, so ist sogar statt einer Abkühlung eine weitere Erwärmung möglich, was nach den Berechnungen Ritters über kosmische Gaskugeln durchaus nicht unwahrscheinlich erscheint. Bei zu langsamer Kontraktion dagegen findet Abkühlung statt. Auch ein Gleichgewichtszustand ist denkbar.

Nach Violle ist die Sonnenausstrahlung etwas gröſser, nämlich auf 1 qm 1 159 000 W.-E i. d. Min., d. h. im ganzen $38\,860 \cdot 10^{26}$ auf das Jahr, statt $27\,163 \cdot 10^{26}$. Jene Kontraktion also würde nach diesen Angaben die Ausstrahlung nur auf 1614 Jahre decken.

Helmholtz hat auf Pouilletscher Grundlage für $\frac{1}{10\,000}$ Kontraktion 2289 Jahre gefunden, was mit dem obigen Ergebnis für $\frac{1}{9500}$ Kontraktion gut zusammenstimmt.

Der bekannte Begründer der Wärmemechanik, Mayer-Heilbronn, hatte sich die Nichtabnahme der Wärme bei der Sonne nicht durch eine Kontraktion, sondern durch eine Art von Meteorregen zu erklären gesucht, wo die aufschlagenden Massen ihre Energie in Wärme um-

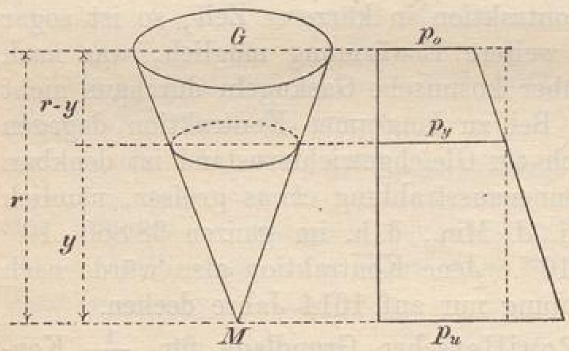
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zusetzen haben. Er selbst aber hatte gegen diesen Meteorregen zugleich das Bedenken ausgesprochen, daſs er die Masse der Sonne vergröſsern und die Umlaufszeit der Planeten verkürzen würde; deshalb versuchte er durch einen sogenannten Centrifugalprozess eigentümlicher Art seine Theorie zu retten, was ihm nicht gelang. Die Helmholtzsche Idee einer dauernden Kontraktion infolge der Gravitationswirkung, der als Widerstand die Wirkung der Wärmeschwingungen der Moleküle entgegenstehen, macht den Mayerschen Massenprozeſs überflüssig; sie läſst sich, wie aus obigem ersichtlich, in elementarster Weise auf grund der Mayerschen Umsetzungstheorie entwickeln, so weit, daſs man in der Lage ist, alle hierher gehörigen Arbeiten der neueren Physiker zu verfolgen und ihre Berechnungen zu prüfen. Von hier aus könnte man z. B. in das Studium der Ritterschen Untersuchungen über die Konstitution gasförmiger Weltkörper eintreten, die in den Poggendorfschen Annalen erschienen und auch vereinigt im Buchhandel zu haben sind. Man hat die Ergebnisse zwar angezweifelt, aber nicht widerlegt. Sie stehen und fallen mit den angenommenen physikalischen Grundgesetzen. Wer Ritter widerlegen will, muſs die Gastheorie in ihren Fundamenten umgestalten.

Das Vorgetragene wird die Wichtigkeit, die dem Begriffe des Selbstpotentials beizulegen ist, einigermaſsen veranschaulichen.

47) Die Anziehung innerhalb einer Erdkugel, deren Dichte von der Oberfläche zum Centrum hin regelmäſsig von $\delta = 2{,}5$ bis zu einem zu berechnenden Werte zunimmt, während die mittlere Dichte gleich 5,6 ist.

Fig. 38.



a) Um auch ein Problem über koncentrische Schichten von veränderlicher Dichte zu behandeln, wird die obige Aufgabe gestellt.

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (genauer einen Sektor) aus der Erdkugel herausgeschnitten. Ist seine obere Fläche G, so hat er in Höhe y den Querschnitt $G_y = G\frac{y^2}{r^2}\cdot$ Ist das spezifische Gewicht unten p_u, oben p_o, so ergiebt sich bei regelmäſsiger Zunahme nach unten für die Höhe y die Dichte p_y aus der Gleichung