Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

47) Anziehung innerhalb der Erdkugel bei regelmässig zunehmender Dichte

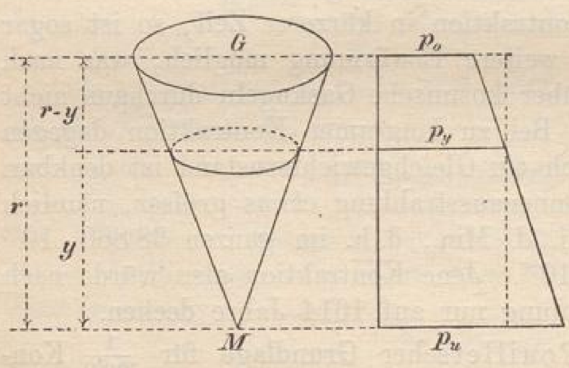
urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

zusetzen haben. Er selbst aber hatte gegen diesen Meteorregen zugleich das Bedenken ausgesprochen, daſs er die Masse der Sonne vergröſsern und die Umlaufszeit der Planeten verkürzen würde; deshalb versuchte er durch einen sogenannten Centrifugalprozess eigentümlicher Art seine Theorie zu retten, was ihm nicht gelang. Die Helmholtzsche Idee einer dauernden Kontraktion infolge der Gravitationswirkung, der als Widerstand die Wirkung der Wärmeschwingungen der Moleküle entgegenstehen, macht den Mayerschen Massenprozeſs überflüssig; sie läſst sich, wie aus obigem ersichtlich, in elementarster Weise auf grund der Mayerschen Umsetzungstheorie entwickeln, so weit, daſs man in der Lage ist, alle hierher gehörigen Arbeiten der neueren Physiker zu verfolgen und ihre Berechnungen zu prüfen. Von hier aus könnte man z. B. in das Studium der Ritterschen Untersuchungen über die Konstitution gasförmiger Weltkörper eintreten, die in den Poggendorfschen Annalen erschienen und auch vereinigt im Buchhandel zu haben sind. Man hat die Ergebnisse zwar angezweifelt, aber nicht widerlegt. Sie stehen und fallen mit den angenommenen physikalischen Grundgesetzen. Wer Ritter widerlegen will, muſs die Gastheorie in ihren Fundamenten umgestalten.

Das Vorgetragene wird die Wichtigkeit, die dem Begriffe des Selbstpotentials beizulegen ist, einigermaſsen veranschaulichen.

47) Die Anziehung innerhalb einer Erdkugel, deren Dichte von der Oberfläche zum Centrum hin regelmäſsig von $\delta = 2{,}5$ bis zu einem zu berechnenden Werte zunimmt, während die mittlere Dichte gleich 5,6 ist.

Fig. 38.



a) Um auch ein Problem über koncentrische Schichten von veränderlicher Dichte zu behandeln, wird die obige Aufgabe gestellt.

Auflösung. Man denke sich einen Kegel (genauer einen Sektor) aus der Erdkugel herausgeschnitten. Ist seine obere Fläche G, so hat er in Höhe y den Querschnitt $G_y = G \frac{y^2}{r^2}$. Ist das spezifische Gewicht unten p_u, oben p_o, so ergiebt sich bei regelmäſsiger Zunahme nach unten für die Höhe y die Dichte p_y aus der Gleichung

$$(p_u - p_y) : y = (p_y - p_o) : (r - y),$$

also

$$p_y = p_u - y \frac{p_u - p_o}{r}.$$

Die Schicht in Höhe y fällt also ins Gewicht mit

$$G_y \cdot p_y = G \frac{y^2}{r^2} \cdot p_u - G y^3 \cdot \frac{p_u - p_o}{r^3}.$$

Für die Summe der Schichten von $y = o$ bis $y = y_1$ giebt die Schichtenformel

1) $$G \frac{p_u}{r^2} \cdot \frac{y_1^3}{3} - G \frac{p_u - p_o}{r^3} \cdot \frac{y_1^4}{4},$$

also für die Schichten von $y = o$ bis $y = y_1$

$$G \frac{p_u}{3} r - G (p_u - p_o) \frac{r}{4} = \frac{Gr}{12} [4 p_u - 3 p_u + 3 p_o] = \frac{Gr}{12} [p_u + 3 p_o] \cdot$$

Der ganze Kegel hat aber bei einer mittleren Dichte 5,6 die Masse

$$G \frac{r}{3} 5{,}6,$$

also ist

$$\frac{Gr}{12} [p_u + 3 p_o] = G \frac{r}{3} 5{,}6$$

d. h.

$$p_u + 3 p_o = 4 \cdot 5{,}6 = 22{,}4$$

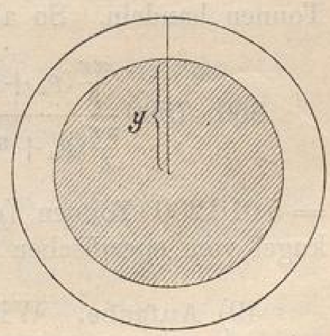
also

$$p_u = 22{,}4 - 3 p_o = 22{,}4 - 7{,}5 = 14{,}9,$$

d. h. etwas höher, als die Dichte des Quecksilbers (13,59).

So kann man für jedes beliebige Zunahmegesetz die Dichte im Centrum berechnen. Die Astronomie giebt in der Regel 12 als wahrscheinliches spezifisches Gewicht im Erdkern an.

Fig. 39.



b) **Aufgabe.** Wie stark ist die Anziehung im Innern dieser Kugel und zwar in Entfernung y vom Mittelpunkte?

Auflösung. Vorher war die Masse des Kegels von o bis y_1 berechnet als

$$G \left[\frac{p_u}{r^2} \frac{y_1^3}{3} - \frac{p_u - p_o}{r^3} \frac{y_1^4}{4} \right].$$

Für die Kugel mit Radius y_1 findet man also

$$4 r^2 \pi \left[\frac{p_u}{r^2} \frac{y_1^3}{3} - \frac{p_u - p_o}{r^3} \frac{y_1^4}{4} \right] = \frac{\pi y_1^3}{3 r} [4 p_u r - 3 (p_u - p_o) y_1] \cdot$$

Diese Masse ist im Mittelpunkte koncentriert zu denken, und da nur der Kern anziehend wirkt, erhält man die Anziehung durch Multiplikation mit $\frac{1}{y_1^2}\cdot$ Sie ist also

$$\frac{\pi y_1}{3r}[4p_u r - 3(p_u - p_o)y_1].$$

Hier ist $p_u = 14{,}9$ und $p_o = 2{,}5$ einzusetzen.

48) **Aufgabe.** Von der Oberfläche bis zur Mitte reiche ein mit Wasser angefüllter Schacht von 1 qm Querschnitt. Wie stark ist der Wasserdruck pro qm im Centrum der Kugel?

Auflösung. Aus

$$\frac{\pi y_1}{3r}[4p_u r - 3(p_u - p_o)y_1]$$

ergiebt sich das Anziehungsdiagramm für den ganzen Radius. Die Schichtenformel ergiebt von o bis r als Diagrammfläche

$$\frac{4\pi}{3}p_u\frac{r^2}{2} - \frac{\pi}{r}(p_u - p_o)\frac{r^3}{3} = \frac{\pi r^2}{3}[2p_u - (p_u - p_o)]$$

oder

$$\frac{\pi r^2}{3}[p_u + p_o].$$

Die mittlere Anziehung ist (da r die Grundlinie des Diagramms bedeutet)

$$\frac{\pi r}{3}(p_u + p_o).$$

Wirkte überall die obere Anziehung

$$\frac{\pi r}{3r}[4p_u r - 3(p_u - p_o)r] = \frac{\pi r}{3}[p_u + 3p_o],$$

die 1 Tonne pro Meter Höhe giebt, so würde es sich um $860 \cdot 7500$ Tonnen handeln. So aber handelt es sich um

$$860 \cdot 7500\frac{\frac{\pi r}{3}(p_u + p_o)}{\frac{\pi r}{3}(p_u + 3p_o)} = 860 \cdot 7500\frac{p_u + p_o}{p_u + 3p_o} = 860 \cdot 7500 \cdot \frac{17{,}4}{22{,}4}$$

$= 5\,010\,200$ Tonnen (gegen $3\,250\,000$ Tonnen bei homogener Erdkugel vom spezifischen Gewichte 5,6).

49) **Aufgabe.** Wie schwer würde der Druck im Centrum sein, wenn der Schacht von 1 qm Querschnitt mit einem beweglichen Kerne ausgefüllt würde, dessen Dichte an jeder Stelle y die oben für diese berechnete ist?