Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

49) Druck im Innern der Erdkugel bei gleicher und veränderlicher Dichte

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Diese Masse ist im Mittelpunkte koncentriert zu denken, und da nur der Kern anziehend wirkt, erhält man die Anziehung durch Multiplikation mit $\frac{1}{y_1^2}$. Sie ist also

$$\frac{\pi y_1}{3r}[4p_u r - 3(p_u - p_o)y_1].$$

Hier ist $p_u = 14{,}9$ und $p_o = 2{,}5$ einzusetzen.

48) **Aufgabe.** Von der Oberfläche bis zur Mitte reiche ein mit Wasser angefüllter Schacht von 1 qm Querschnitt. Wie stark ist der Wasserdruck pro qm im Centrum der Kugel?

Auflösung. Aus

$$\frac{\pi y_1}{3r}[4p_u r - 3(p_u - p_o)y_1]$$

ergiebt sich das Anziehungsdiagramm für den ganzen Radius. Die Schichtenformel ergiebt von o bis r als Diagrammfläche

$$\frac{4\pi}{3}p_u\frac{r^2}{2} - \frac{\pi}{r}(p_u - p_o)\frac{r^3}{3} = \frac{\pi r^2}{3}[2p_u - (p_u - p_o)]$$

oder

$$\frac{\pi r^2}{3}[p_u + p_o].$$

Die mittlere Anziehung ist (da r die Grundlinie des Diagramms bedeutet)

$$\frac{\pi r}{3}(p_u + p_o).$$

Wirkte überall die obere Anziehung

$$\frac{\pi r}{3r}[4p_u r - 3(p_u - p_o)r] = \frac{\pi r}{3}[p_u + 3p_o],$$

die 1 Tonne pro Meter Höhe giebt, so würde es sich um $860 \cdot 7500$ Tonnen handeln. So aber handelt es sich um

$$860 \cdot 7500 \frac{\frac{\pi r}{3}(p_u + p_o)}{\frac{\pi r}{3}(p_u + 3p_o)} = 860 \cdot 7500 \frac{p_u + p_o}{p_u + 3p_o} = 860 \cdot 7500 \cdot \frac{17{,}4}{22{,}4}$$

$= 5\,010\,200$ Tonnen (gegen $3\,250\,000$ Tonnen bei homogener Erdkugel vom spezifischen Gewichte 5,6).

49) **Aufgabe.** Wie schwer würde der Druck im Centrum sein, wenn der Schacht von 1 qm Querschnitt mit einem beweglichen Kerne ausgefüllt würde, dessen Dichte an jeder Stelle y die oben für diese berechnete ist?

Auflösung. Multipliziert man die für y berechnete Dichte

$$p_y = \frac{p_u r - y(p_u - p_o)}{r}$$

mit der dort wirkenden Anziehung, so giebt die Schicht von 1 m Dicke dort den Anteil

$$\frac{\pi}{3r^2}[4p_u ry - 3(p_u - p_o)y^2][p_u r - (p_u - p_o)y] =$$

$$1) \qquad \frac{\pi}{3r^2}[4p_u^2 r^2 y - 7p_u r(p_u - p_o)y^2 + 3(p_u - p_o)^2 y^3].$$

Bildet man das Anziehungsdiagramm, so ist dessen Fläche nach der Schichtenformel

$$\frac{\pi}{3r^2}\left[4p_u^2 r^2 \frac{r^2}{2} - 7p_u r(p_u - p_o)\frac{r^3}{3} + 3(p_u - p_o)^2 \frac{r^4}{4}\right]$$
$$= \frac{\pi r^2}{36}[5p_u^2 + 10p_u p_o = 9p_o^2],$$

seine mittlere Höhe also

$$\frac{\pi r}{36}[5p_u^2 + 10p_u p_o + 9p_o^2].$$

Die oben wirkende Anziehung ist aber nach 1), wo $y = r$ zu setzen ist, gleich

$$\frac{\pi r}{3}p_o(p_u + 3p_o)$$

und giebt 2,5 Tonnen Druck auf das Meter Höhe

Herrscht sie überall, so würde es sich um 2,5 · 860 · 7500 Tonnen handeln. So aber handelt es sich um

$$2{,}5 \cdot 860 \cdot 7500 \cdot \frac{5p_u^2 + 10p_u p_o + 9p_o^2}{12p(p_u + 3p_o)} \text{ Tonnen.}$$

Setzt man wieder $p_u = 14{,}9$ und $p_o = 2{,}5$, so erhält man

$$\frac{2{,}5 \cdot 860 \cdot 7500 \cdot 1536{,}55}{672} = 36\,871\,000 \text{ Tonnen}$$

statt 18200000 Tonnen bei homogener Erde von mittlerer Dichte 5,6. Der grofse Unterschied erklärt sich daraus, dafs bei der homogenen Erde die Abnahme der Anziehung nach unten hin weit schneller vor sich geht, da die nicht mehr anziehenden Aufsenschichten von grofser Fläche sind und viel Masse enthalten. Bei dem vorliegenden Probleme enthalten aber gerade die grofsflächigen Schichten verhältnismäfsig wenig Masse.