Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel IV. Die einfachsten Kraftröhren und Niveauflächen; Zelleneinteilung des Raumes und physikalische Anwendungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

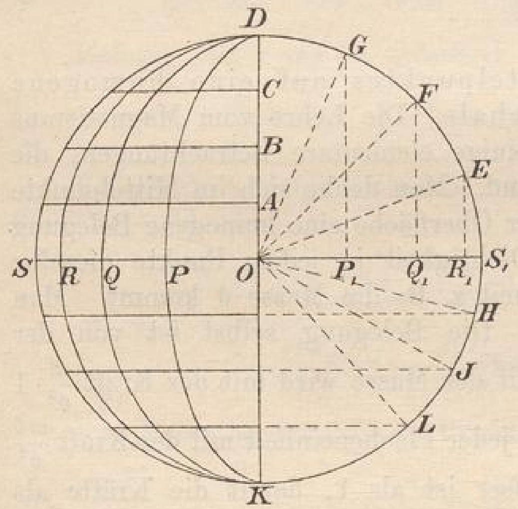
Kapitel IV.

Die einfachsten Kraftröhren und Niveauflächen; Zelleneinteilung des Raumes und physikalische Anwendungen.

51) Anziehung des Mittelpunktes auf eine homogene Massenbelegung der Kugelschale. Die Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität erfordert einige elementare Betrachtungen, die für das Folgende sehr wichtig sind. Man denke sich im Mittelpunkte der Kugel eine Masse m, auf ihrer Oberfläche eine homogene Belegung mit ponderabler Masse, deren Dichtigkeit in jedem Punkte dieselbe sei, so daſs auf die Flächeneinheit z. B. die Masse δ kommt. Man nennt dann δ die Dichtigkeit. Die Belegung selbst ist von der Menge $m_1 = 4\varrho^2\pi\delta$. Jede Einheit der Masse wird mit der Kraft $\frac{m}{\varrho^2}\cdot 1$ nach innen gezogen, die Belegung jeder Flächeneinheit mit der Kraft $\frac{m\delta}{\varrho^2}$ (vorausgesetzt, daſs ϱ weit gröſser ist als 1, damit die Kräfte als parallel gelten können), jede kleine Fläche f mit der Kraft $\frac{mf\delta}{\varrho^2}$. [Im Hohlraume ist das Potential der Belegung konstant gleich dem an der Oberfläche geltenden, d. h. gleich $\frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho} = 4\varrho\pi\delta$, das des Massenpunktes im Centrum ist für die Entfernung r gleich $\frac{m}{r}$, also ist für jeden Punkt im Hohlraume das Potential gleich $\frac{m}{r} + 4\varrho\pi\delta$, für jeden äuſseren Punkt gleich $\frac{m}{r} + \frac{4\varrho^2\pi\delta}{r}$.] Für verschiedene koncentrische Kugeln handelt es sich in Bezug auf die Masseneinheit um die Anziehungen $p_1 = \frac{m}{\varrho_1^2}$ und $p_2 = \frac{m}{\varrho_2^2}$, so daſs $p_1 4\varrho_1^2\pi = p_2 4\varrho_2^2\pi$ oder $p_1 O_1 = p_2 O_2$ ist. Beschränkt man die Betrachtung auf eine Pyramide oder einen Kegel mit der Spitze im Centrum, der von jeder Kugelfläche $\frac{1}{n}$ abschneidet, so daſs die Schnittflächen $F_1 = \frac{O_1}{n}$ und $F_2 = \frac{O_2}{n}$ sind, so folgt $p_1 F_1 = p_2 F_2$.

52) Einteilung der Kugelfläche in gleiche Felder. In der Elektrizitätslehre ist es für die Faradaysche Auffassung von Wichtigkeit, die Kugelfläche in gleiche Felder einzuteilen. Dies geschieht am bequemsten so, dafs man eine Achse, z. B. DK in gleiche Teile einteilt und durch die Teilpunkte Normalschnitte legt, die auf der Fläche die sogenannten Parallelkreise geben. Die Zonen haben sämtlich dieselbe Fläche, nämlich, wenn n die Anzahl der Teile der Achse d ist, die Fläche $\frac{2 r \pi d}{n} = \frac{4 r^2 \pi}{n}$. Die Einteilung ist also eine andere als die beim Globus gebräuchliche, wie sie in Fig. 41 dargestellt ist. Sodann führt man Meridian-Schnitte, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Ihre Verzeichnung im Aufrifs kann erfolgen, indem man den Quadranten $\widehat{DS_1}$ in gleiche Teile teilt, von den Teilpunkten aus Lote GP_1, FQ_1, ER_1 auf den horizontalen Durchmesser fällt, die symmetrischen Punkte P, Q, R, S zu den Fufspunkten bildet und durch jedes Paar und die Pole, z. B. durch P, P_1, K und D die entsprechenden Ellipsen legt. Bei vollständiger Zeichnung würde es sich in der Figur um $8 \cdot 16 = 128$ Teile handeln. Für den Radius 1 hätte also jedes „Rechteck" der Kugelfläche den Inhalt $F = \frac{4\pi}{128}$. Hätte man doppelt so grofse Teilzahlen genommen, so würde man $4 \cdot 128 = 512$ Teile erhalten haben. DK heifst die Achse der Einteilung.

Fig. 40.

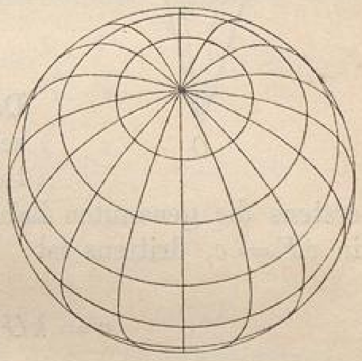


Die Neigungen der Radien OS_1, OE, OF, OG und OD folgen allgemeiner einer arithmetischen Reihe $0, \frac{\pi}{2n}, 2\frac{\pi}{2n}, 3\frac{\pi}{2n}, \ldots, n\frac{\pi}{2n}$. Die Radien OS_1, OH, OJ, OL, OK dagegen folgen so aufeinander, dafs die Cosinus ihrer Abweichungen gegen OK eine arithmetische Reihe $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ bilden. Auf das letztere kommen wir noch einmal zurück.

Verbindet man jeden Schnittpunkt auf der Oberfläche mit dem Kugelcentrum O, so erhält man im ersten Falle 128, im zweiten 512 Pyramiden. Je gröfser die Teilzahl genommen wird, um so mehr darf man ihre Grundflächen als eben betrachten. Ist die Grundfläche der 128., bezw. der 512. Teil der Oberfläche 4π, so sagt man, der körperliche Winkel der Pyramide sei von der Gröfse $\frac{4\pi}{128}$ bezw. $\frac{4\pi}{512}$. Trotz des verschiedenen Aussehens haben sämtliche Pyramiden denselben körperlichen Winkel.

53) Kraftflufs und Kraftröhren, Geschwindigkeitspotential. Die neuere Physik betrachtet die elektrischen Anziehungen nicht als momentan in Wirksamkeit tretende Fernwirkungen, sondern als zeitlich von Molekül auf Molekül sich fortpflanzende Wirkungen. Für die obige Centralmasse war pO eine konstante Gröfse, die stets gleich $\frac{m}{r^2} 4r^2\pi = 4\pi m$ ist. Dieses konstante Produkt aus Einheitskraft und Oberfläche bezeichnet Faraday als den vom Centrum ausgehenden Kraftflufs. Beschränkt man die Betrachtung auf eine der besprochenen Pyramiden, so ist die Gröfse des Kraftflusses für diese gleich der Konstanten pF. Jede dieser Pyramiden wird als eine Kraftröhre bezeichnet. Der Kraftflufs geschieht in ihr in ähnlicher Weise, als ob eine inkompressible Flüssigkeit von O nach dem Felde der Kugeloberfläche oder von dort aus zurückflösse.

Fig. 41.

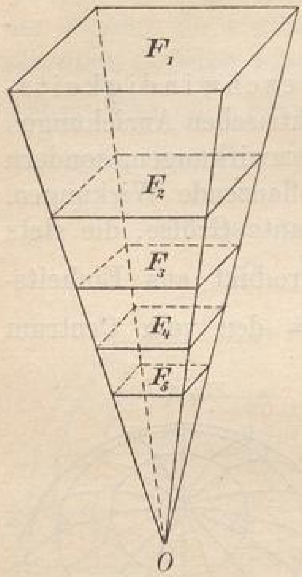


Man kann sich die Kraftröhre in Zellen eingeteilt denken. Tritt in jede Zelle ebenso viel Kraftflufs bezw. Flüssigkeit ein, wie aus, so setzen Faraday und Maxwell ihren Kraftflufs gleich Null, Poisson dagegen hat den Kraftflufs als Spannung der Zelle bezeichnet. Darüber wird später ausführlicher gesprochen werden. Die Mittellinien der Kraftröhren werden häufig als Kraftlinien bezeichnet.

Um ein klares Bild zu erhalten, denke man sich in einer solchen Kraftröhre eine inkompressible Flüssigkeit, bei O eine Öffnung, aus der sie ausfliefst, während von oben her der Verlust durch Nachfüllen kontinuierlich ersetzt wird. Dann ist die Geschwindigkeit an jeder Stelle wie grofs? Da durch jeden Querschnitt $F_1, F_2, F_3 \ldots$ in der Zeiteinheit dieselbe Menge fliefst, verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Quadrate der Radien. Ist also v für den Radius 1 gleich 1, so ist es für den Radius r gleich $\frac{1}{r^2}$. Dies entspricht ganz der anziehenden Wirkung einer Masse 1 auf die Masseneinheit, die in Entfernung r

ebenfalls gleich $\frac{1}{r^2}$ ist. Dasselbe gilt von der entgegengesetzten Bewegung. Vergl. Fig. 42.

Fig. 42.



Nun waren nach Nr. 18 die Abstände $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ solche, für welche die Potentialwerte der Reihe nach gleich 1, 2, 3, 4, 5 ... sind, also in arithmetischer Reihe aufeinander folgen. Die Anziehungen aber waren der Reihe nach gleich 1, 4, 9, 16, 25 ... An jeder Stelle ist $p \cdot F = c$, denn

$$p_1 : p_2 = F_2 : F_1 = r_2^2 : r_1^2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}.$$

An jeder Stelle ist ferner nach Nr. 17 p gleich bezw. proportional dem Potentialgefälle G, denn

$$p = kG = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_2}.$$

Da nun p und v in beiden Problemen demselben Gesetze folgen, also einander proportional sind, so gelten für die Strömung erstens die genannten Zahlenverhältnisse, zweitens geht $pF = c$ über in $vF = c$, drittens ist

$$v = kG = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_2}.$$

Jetzt ist k irgend eine Konstante, von der, wie aus der letzten Formel hervorgeht, die Geschwindigkeit abhängig ist. Man kann sie als einen Leitungskoeffizienten oder eine Widerstandskonstante auffassen.

Da aus der Potentialdifferenz jetzt nicht eine Kraft, sondern eine Geschwindigkeit abgeleitet wird, hat das Potential nicht mehr die Bedeutung einer Kraftfunktion, sondern die einer Geschwindigkeitsfunktion. Helmholtz hat dafür den Namen Geschwindigkeitspotential eingeführt.

Vorher war, wenn man $k = 1$ gesetzt hatte,

$$V_2 - V_1 = pw = \text{Arbeit} = \text{Kraft mal Kraftweg},$$

jetzt ist

$$V_2 - V_1 = v \cdot w = \text{Geschwindigkeit mal Geschwindigkeitsweg}.$$

Die kleine Potentialdifferenz bedeutet also jetzt das Produkt aus der kleinen Verschiebung und der (mittleren) Geschwindigkeit, mit der sie zurückgelegt wird.

Bei einem längeren Wege handelte es sich früher um die Summe von Arbeiten, d. h. um Σpw, hier um die Summe der Produkte aus den kleinen Verschiebungen und den zugehörigen Geschwindigkeiten, also um Σvw.

Eine solche Flüssigkeit ist allerdings nur eine gedachte, ideale. Ihre Eigenschaften können erst später, bei den allgemeinen Problemen, dargestellt werden. Aber die Einführung des Begriffes Geschwindigkeitspotential gestattet eine kurze Ausdrucksweise, ohne dabei über die Natur des betreffenden Fluidums (Wärme, Elektrizität) irgend welche hypothetischen Voraussetzungen zu beanspruchen. Helmholtz bezeichnet die Kraftröhre als Stromfaden, jede ihn begrenzende Kraftlinie als Stromlinie.

Helmholtz hätte ebenso gut eine elastische Flüssigkeit von konstanter Geschwindigkeit und veränderlicher Dichte betrachten können, die nach den entsprechenden Gesetzen in den Kraftröhren fliefst. Soll eine solche Strömung stationär sein, so müssen die Dichtigkeiten δ sich umgekehrt wie die Querschnitte verhalten, also

$$\delta_1 : \delta_2 = F_2 : F_1 = r_2^2 : r_1^2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2},$$

und

$$\delta = kG = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_2}.$$

Jetzt würde ($k = 1$ gesetzt)

$$V_2 - V_1 = \delta w$$

sein, d. h. die Potentialdifferenz gleich dem Produkte aus der kleinen Verschiebung und der zugehörigen (mittleren) Dichte. Das Potential wäre analog als Dichtigkeitspotential zu bezeichnen.

Nimmt man in irgend einem Material konstante Geschwindigkeit eines elektrischen Fluidums an, so entspricht die obige Annahme ganz ebenso dem Ohmschen Gesetze für die elektrische Strömung in einem Drahte von veränderlichem Querschnitte F, wie die des Helmholtzschen Fluidums.

54) Das Ohmsche Gesetz.

In homogenen Drähten von überall gleichem Querschnitte handelt es sich für gleiche Abstände um gleiche Potentialdifferenzen. Die Potentialdifferenz längs einer Strecke ist nämlich die mechanische Arbeit, die der stationäre Strom nötig hat, um die Elektrizitätsmenge 1 durch die Widerstände, welche diese Strecke bietet, hindurchzuführen. Ist die Potentialdifferenz gleich 1, die Länge gleich 1 und der Querschnitt gleich 1, so dauert es, je nach dem Material des Drahtes, eine gewisse Zeit ϱ, bis die Einheit der Elektrizitätsmenge einen der Querschnitte passiert hat. Je gröfser diese Zeit ist, um so gröfser ist der Widerstand des Materials an sich, um so geringer seine Leitungsfähigkeit. Daher heifst ϱ der spezifische Widerstand, d. h. der auf die obigen Einheiten reduzierte Widerstand. In der Sekunde geht dann durch den Querschnitt die elektrische Menge $\frac{1}{\varrho} = \lambda$, und diese Gröfse heifst das spezifische Leitungsvermögen des Materials.

Ist nun die Fläche des Querschnitts F mal so grofs, so geht die Ffache Menge von Elektrizität hindurch, ist die Länge l mal so grofs, der Widerstand also der $l$fache, so geht der $l$te Teil hindurch, ist die Potentialdifferenz nicht 1, sondern $(V_2 - V_1)$, so geht das $(V_2 - V_1)$fache hindurch. Für einen Draht von Länge l und Querschnitt F ist also bei gegebener Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ die jeden Querschnitt sekundlich passierende Elektrizitätsmenge

$$I = \frac{\lambda}{l} F(V_2 - V_1) = \lambda F G,$$

also ist

$$V_2 - V_1 = I \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{l}{F} = I \cdot \varrho \frac{l}{F} = I \cdot W,$$

wo W den wirklichen Widerstand des Drahtes bedeuten soll.

Dies ist der Ausdruck für das Ohmsche Gesetz. Man bezeichnet I als die Stromstärke (Intensität der Strömung), G ist wieder das Potentialgefälle.

Ist v die Geschwindigkeit, F der Querschnitt, δ die Dichte, d. h. die mittlere Elektrizitätsmenge auf der Raumeinheit, so ist die Stromstärke zugleich

$$I = \delta v F.$$

Durch Gleichsetzung erhält man als Formel für die Stromdichte

$$\delta = \frac{\lambda}{v} \frac{V_2 - V_1}{l} = \frac{\lambda}{v} G = k G,$$

wo k eine konstante Gröfse ist.

Handelt es sich nun um eine fingierte elektrische Strömung in einem den Raum homogen erfüllenden Mittel, die von dem Punkte O aus nach allen Seiten dem unendlichen Bereiche zuströmt, so wird man den Forderungen des Ohmschen Gesetzes gerecht, wenn man sich in O einen Pol von irgend welcher Polstärke m denkt, der die elektrische positive Einheit mit der Kraft $\frac{m}{r^2}$ abstöfst (die entgegengesetzte anzieht), so dafs $\frac{m}{r}$ das Potential und $\frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1}$ die Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ ist. Jetzt würde die Stromdichte sein

$$\delta = k_1 m \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{r_2 - r_1} = k_1 G.$$

[Ist r unendlich grofs, so giebt eine endliche Verschiebung e die Anziehungsdifferenz

$$\frac{m}{(r+e)^2} - \frac{m}{r^2} = \frac{m}{r^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{e}{r}\right)^2} - 1\right],$$

was gleich Null ist, sobald $\frac{e}{r}$ unendlich klein wird. Ist aber die Anziehung überall dieselbe, so ist das Arbeitsdiagramm ein Rechteck, gleichen Strecken also entsprechen gleiche Potentialdifferenzen, und dies entspricht dem Ohmschen Gesetze, d. h. die Bewegung im Drahte überall gleichen Querschnitts ist ein besonderer Fall der obigen Strömung, nur ist der Draht unendlich lang zu denken].

Beiläufig sei bemerkt, dafs nach obiger Definition die Potentialdifferenz in einem Drahte von Länge l die auf die elektrische Menge 1 reduzierte Stromarbeit (Überwinden von Widerständen) war, dafs also

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Stromarbeit}}{\text{Elektrizitätsmenge}}.$$

Daraus folgt

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Stromarbeit pro Sekunde}}{\text{Elektrizitätsmenge pro Sekunde}} = \frac{L}{I}.$$

Nach obigem aber war zugleich

$$V_2 - V_1 = I \cdot \left(\varrho \frac{l}{F}\right) = IW$$

d. h. Potentialdifferenz gleich Stromstärke mal wirklicher Widerstand, d. h. z. B. Anzahl der Volt gleich Anzahl der Ampère mal Anzahl der Ohm. Daraus folgt $IW = \frac{L}{I}$ oder $L = WI^2$. Näheres darüber ist im Anhange gezeigt, wo es sich um die elektrischen Einheiten handelt.

55) Ähnlich ist es mit den stationären Strömen der Wärme, nur treten hier an Stelle der Potentialdifferenzen Temperaturunterschiede, an Stelle der hypothetischen Elektrizitätsmengen Wärmemengen. Weil in jede Zelle ebensoviel Wärme einströmt, wie aus ihr ausströmt, so bleibt die Temperatur an jeder Stelle konstant. An Stelle der durch den Querschnitt strömenden Elektrizitätsmenge $I = \lambda F \frac{V_2 - V_1}{l} = \lambda F G$ tritt jetzt die hypothetische Wärmemenge $I = k F \frac{T_2 - T_1}{l} = k F G$. Darauf soll jetzt nicht näher eingegangen werden. Die Betrachtungen würden fast wörtlich dieselben sein.

Haben nun die Kraftröhren sämtlich denselben körperlichen Winkel, so fließt in allen (unter gleichen Umständen) dieselbe Flüßsigkeitsmenge, bei dem Anziehungsprobleme dagegen ist in allen pF dieselbe Konstante. Sie sind also potentiell gleichwertig.

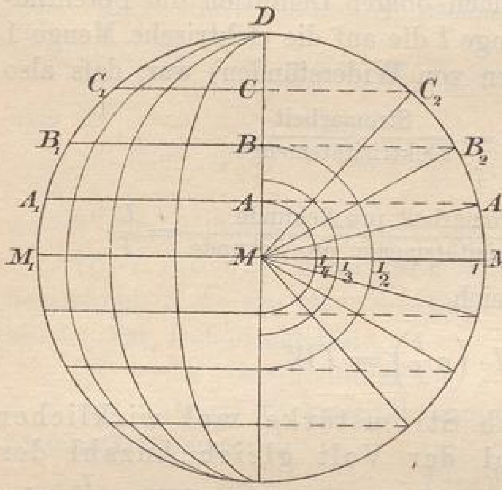
56) Zelleneinteilung des Raumes. Legt man nun um O koncentrische Kugeln, deren Radienunterschiede gleichen Potentialdifferenzen entsprechen, also z. B. mit den aus Fig. 10 zu entnehmenden Radien

$$\frac{m}{0} = \infty, \frac{m}{1}, \frac{m}{2}, \frac{m}{3}, \frac{m}{4}, \frac{m}{5}, \ldots,$$

so wird der Raum in rechteckige Zellen eingeteilt, die ebenfalls potentiell gleichwertig sind. Die genannte Reihe entspricht bei Masse $m = 1$ oder elektrischer Ladung 1 den Potentialwerten

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Fig. 43.



In der Zeichnung bedeutet die linke Hälfte die Ansicht der Einheitskugel von außen, die rechte den Schnitt in der Ebene der Zeichnung. Man beachte dabei, daß die Längen MA, MB, MC und MD die Cosinus der Poldistanzen $\widehat{DA_1}$, $\widehat{DB_1}$, $\widehat{DC_1}$ und o sind, die also in gleichen Intervallen aufeinander folgen, so daß die Cosinus der Poldistanzen bei dieser Einteilung ebenso, wie die umgekehrten Werte der Radien eine arithmetische Reihe bilden. Dasselbe gilt von den Meridianen, deren Abweichungen, wie die geographischen Längen, von einem Meridian Null aus zu messen sind.

Diese graphischen Darstellungen des Potentialzustandes im „elektrischen" oder „magnetischen Felde" geben nun vereinfachte Anschauungen. Zunächst aber sei ein Vergleich für verschiedene elektrische Ladungen gemacht.

57) Anzahl der Kraftlinien für verschiedene Ladungen. Ein Konduktor vom Radius 1 erhalte die Ladung von 12, ein anderer von gleichem Radius die Ladung von 48 elektrischen Einheiten. Teilt man die Oberfläche des einen wie vorher in 128 gleiche

Felder ein, so kommt auf jeden Teil $\frac{12}{128} = \frac{3}{32}$ der Einheitswirkung. Teilt man die Oberfläche des anderen in 512 gleiche Felder ein, so kommt auf jeden Teil $\frac{48}{512} = \frac{3}{32}$ der Einheitswirkung. Die Kraftröhren beider Einteilungen sind demnach potentiell gleichwertig. Also:

Gleichwertigkeit der Kraftröhren bei verschiedenen Ladungen findet statt, wenn ihre Anzahlen den Ladungen proportional sind.

Sollen nun bei der ersten Ladung die Radien der Kugeln so aufeinander folgen, dafs von Kugelfläche zu Kugelfläche die Potentialdifferenz gleich 1 ist, dafs also die Potentialwerte der Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ldots$$

folgen, so müssen sich die Radien ergeben aus den Potentialwerten

$$\tfrac{12}{\infty} = 0,\ \tfrac{12}{12} = 1,\ \tfrac{12}{6} = 2,\ \tfrac{12}{4} = 3,\ \tfrac{12}{3} = 4,\ \frac{12}{\left(\frac{12}{5}\right)} = 5,\ \tfrac{12}{2} = 6,\ \ldots$$

als $r = \infty$, 12, 6, 4, 3, 2,4, 2, ... oder als

$$r = \tfrac{12}{0},\ \tfrac{12}{1},\ \tfrac{12}{2},\ \tfrac{12}{3},\ \tfrac{12}{4},\ \tfrac{12}{5},\ \tfrac{12}{6},\ \ldots.$$

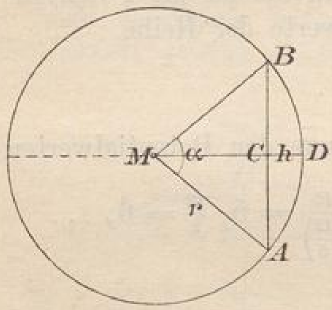
Bei der zweiten Ladung dagegen erhält man dieselben Potentialdifferenzen bei den Radien

$$r = \tfrac{48}{0},\ \tfrac{48}{1},\ \tfrac{48}{2},\ \tfrac{48}{3},\ \tfrac{48}{4},\ \tfrac{48}{5},\ \tfrac{48}{6},\ \ldots$$

So erhält man für beide Probleme gleichwertige Raumzellen und damit für jedes eine Art von potentiellem Koordinatensystem. Die Arbeit von Fläche zu Fläche ist in beiden Systemen dieselbe, und bei homogener Belegung eines beliebigen Feldes mit Masse übt die Einheit in O bei beiden Problemen dieselbe Anziehung aus.

Man hat sich geeinigt, die Anzahl der von einer Centralmasse m ausgehenden Kraftlinien oder Kraftröhren gleich dem Kraftflusse $4\pi m$ zu setzen, so dafs auf jede der Kraftflufs 1 kommt. Auf jedes Quadratcentimeter einer koncentrischen Kugelfläche kommen dann $\frac{4\pi m}{4r^2\pi} = \frac{m}{r^2}$ Kraftröhren, was mit dem Ausdrucke für die Gröfse der Anziehung übereinstimmt und als Feldstärke für die betreffende Stelle bezeichnet wird. Die Kugeloberfläche ist also in $4\pi m$ gleichgrofse Felder eingeteilt zu denken. Die Verdoppelung der Ladung m giebt Verdoppelung der Kraftröhren- und Verdoppelung der Zellenzahl in jeder Röhre. Fafst man die gleichen Zonen der obigen Einteilung als Grundflächen der Pyramiden auf, und ist ihre Zahl und ebenso die der Kraftröhren z. B. gleich 20, so folgt aus $4\pi m = 20$, daſs man die Centralmasse m als $\frac{20}{4\pi} = 1{,}592$ angenommen hat. Der Kraftfluſs in jeder der Röhren ist stets gleich 1, bei Querschnitt F ist er also für jedes Quadratcentimeter gleich $\frac{1}{F}$, bei unserer Zoneneinteilung also $\frac{1}{\frac{4r^2\pi}{20}} = \frac{20}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{m}{r^2}$, was wieder die Feldstärke giebt. Also: Feldstärke gleich Kraftfluſs pro Quadratcentimeter Querschnittsfläche.

Fig. 44.



Bisweilen wird die einzelne Kraftröhre auch in Gestalt eines Kreiskegels angenommen. Dies giebt Veranlassung zu folgender

58) **Aufgabe:** Ein Kreiskegel habe im Hauptschnitt den Winkel $AMB = \alpha$ (die Seite MA sei $= r$). Wie groſs ist sein körperlicher Winkel?

Auflösung. Es fragt sich, den wievielten Teil der Kugeloberfläche die Kalotte ADB von Höhe $CD = h$ ausmacht. Ihre Fläche ist gleich $2r\pi h$, also da

$$h = r - MC = r - r\cos\frac{\alpha}{2} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

ist, gleich

$$2r\pi r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2r^2\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

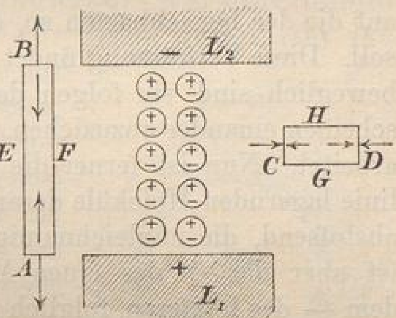
Demnach ist

$$\frac{\text{Kalotte}}{\text{Kugelfläche}} = \frac{2r^2\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4r^2\pi} = \frac{1 - \cos\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Bei dem Monde, der Sonne, dem Jupiter u. s. w. würde α den scheinbaren Durchmesser in Bogengraden (Minuten, Sekunden, ...) bedeuten. Man kann also ausrechnen, den wievielten Teil des scheinbaren Himmelsgewölbes sie bedecken. Bei der Sonne handelt es sich um $\alpha = 32'\,0'',88$. Dagegen nennt man den halben Bogen, unter dem von ihr aus die Erde erscheint, die Sonnenparallaxe. Der ganze Bogen ist etwa das $\frac{1719}{195\,000}$ von α, nach Encke genau $\beta = 16'',14232$. Demnach würde der Bruch $\frac{1 - \cos\frac{\beta}{2}}{2}$ z. B. angeben, der wievielte Teil der Wärmeausstrahlung der Sonne unserer Erde zu gute kommt. Auch hier handelt es sich um die Berechnung eines Kraftflusses.

59) Andeutungen über die Kraftlinien. Früher wurden die Kraftlinien einfach als diejenigen Kurven betrachtet, die das System der Niveauflächen senkrecht durchsetzen. Die Wirkungen von Körper auf Körper wurden einfach als Fernwirkungen aufgefaſst. Faraday gab ihnen eine vollständig neue Bedeutung. Er nannte das zwei irgendwie geladene Leiter trennende Mittel isolierender Art, also z. B. die Luft, den leeren Raum, irgend ein Gas u. s. w. das Dielektrikum und behauptete, daſs die in diesem lagernden Moleküle, deren jedes nach Art der latenten Magnetismen beide Arten von Elektrizität in gleichen Mengen hätte, durch jene Ladungen polarisiert und so in einen gewissen Zwangszustand versetzt würde. Ein wirkliches Wandern der Elektrizitäten im Dielektrikum nahm er als unmöglich an, nur eine Art von Induktionsverschiebung innerhalb jedes Moleküls. Die Polarisation dachte er sich also ähnlich, wie sie hypothetisch bei der Magnetisierung eines Stahlstabes eintritt, jedes Teilchen erhält zwei Pole, die in die Richtung der entsprechenden Kraftlinie fallen (vgl. Fig. 45), so daſs in jeder eine Kette von Molekülen sich befindet, der sich die entgegengesetzten Pole zuwenden.

Fig. 45.



In der Figur ist zu denken, daſs zwei gegeneinander isolierte Leiter L_1 und L_2 mit entgegengesetzten Elektrizitäten geladen sind. Zwei Reihen polarisierter Moleküle des Dielektrikums sind eingezeichnet worden. Sofort nach der Ladung tritt in dem Dielektrikum ein Zwangs- oder Spannungszustand ein, der durch eine Analogie veranschaulicht werden kann.

Wird ein Metallstab AB durch gleiche und entgegengesetzte Zugkräfte beansprucht, so verlängert er sich ein wenig, und dann tritt, wenn die der Elastizitätsgrenze entsprechende Beanspruchung nicht überschritten wurde, Gleichgewicht ein. Zwischen den Molekülen sind also Gegenspannungen aufgetreten, die eine weitere Ausdehnung verhindern. Diese Gegenspannungen sind um so stärker, je gröſser innerhalb der genannten Grenze die Beanspruchung und die Verlängerung ist. Hört die Beanspruchung auf, so ziehen die Gegenspannungen die Moleküle des Stabes wieder zusammen, bis er wieder die ursprüngliche Länge hat. Durch die Zugbeanspruchung wird also ein Zwangs- und Spannungszustand hervorgerufen, der in der Figur durch den Stab AB und die eingezeichneten Kräfte veranschaulicht wird.

Entsprechendes findet statt, wenn auf einen kurzen Stab *CD* äufsere Druckkräfte einwirken. Er wird so lange zusammengeprefst, bis die hervorgerufenen Gegenspannungen den Druckkräften das Gleichgewicht halten. Hört die Beanspruchung auf, so treiben die Gegenspannungen die Moleküle wieder auseinander.

Übrigens findet bei der Zugbeanspruchung des Stabes *AB* zugleich eine leise Einschnürung, eine Kontraktion statt, so dafs z. B. bei *EF* zugleich Druckspannungen entstehen, die senkrecht gegen die Zugspannungen gerichtet sind. Ebenso giebt der Druck am Stabe *CD* eine leise Ausdehnung in der Richtung *GH*, so dafs Zug und Druck stets kombiniert auftreten.

Denkt man sich etwa die an L_1 und L_2 grenzenden Moleküle mit ihren Polen dicht an L_1 und L_2 herangezogen, so ist jede Reihe der Moleküle in einen Zustand nach Art der Zugspannung versetzt. Die Elektrizitäten jedes Moleküls wirken nach Art der Gegenspannungen auf die der benachbarten so, dafs eine Verkürzung der Reihe stattfinden soll. Diese Verkürzung findet wirklich statt, sobald die Leiter L_1 und L_2 beweglich sind, sie folgen dann dem Zuge der Gegenspannungen und scheinen einander anzuziehen, während in Wirklichkeit das Dielektrikum arbeitet. Nun ist ferner die Wirkung zweier in derselben Horizontallinie lagernden Moleküle derart, dafs die gleichnamigen Pole aufeinander abstofsend, die ungleichnamigen aufeinander anziehend wirken. Dabei ist aber das + des einen Moleküls dem + des anderen näher, als dem — des letzteren, folglich überwiegt die Abstofsung. Diese kann bei den von einem einzigen Centrum ausstrahlenden geradlinigen Kraftlinien keine Bewegungserscheinungen hervorrufen, weil für sie nur eine einzige homogene Anordnung möglich ist. Wie es sich aber bei mehreren Centren verhält, d. h. wie dort dieser Abstofsung das Gleichgewicht gehalten wird, das soll später bei den allgemeineren Betrachtungen auseinandergesetzt werden. Jede Störung der Anordnung wird nach Entfernung des störenden Einflusses durch die abstofsenden Kräfte wieder aufgehoben.

Der Zwangszustand des elektrischen Feldes ist also derartig, dafs — kurz ausgedrückt — jede Kraftlinie das Bestreben hat, sich zu verkürzen, während benachbarte gleichgerichtete (gleichartig polarisierte) Kraftlinien sich gegenseitig abstofsen.

Entfernt man die Ladungen aus L_1 und L_2, so hört der Zwangszustand des elektrischen Feldes auf, und die Elektrizitäten der Moleküle kehren in die ursprüngliche Lage zurück. Anziehung und Influenz z. B. sind daher von der Art des Dielektrikums abhängig. Zu jedem Dielektrikum gehört eine gewisse Dielektrizitätskonstante, über die sich die Lehrbücher näher aussprechen. Vgl. Nr. 68.

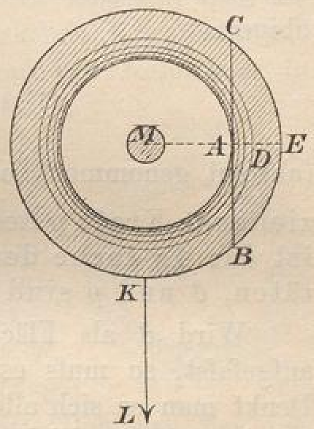
Auch der leere Raum ist als Dielektrikum zu betrachten. Als isolierendes Mittel wird in ihm von Maxwell hypothetisch der sogenannte Lichtäther angenommen. Dadurch erklärt er zugleich den eigentümlichen Zusammenhang zwischen den elektrischen und optischen Erscheinungen, z. B. den Einflufs der elektrischen Spannung auf die Lage der Polarisationsebene doppeltbrechender Krystalle, die Übereinstimmung der Fortleitungsgeschwindigkeiten, was schliefslich auf die von ihm aufgestellte elektromagnetische Theorie des Lichtes führte, die auch von Helmholtz bearbeitet worden ist.

Auf die Gestalt der Kraftlinien für schwierigere Probleme gehen also erst die folgenden Kapitel ein. Jetzt sollen Influenzprobleme über die Kugel bezw. die Kugelschale nebst dazugehörigen Erscheinungen besprochen werden.

60) Centrische Influenz eines Konduktors auf eine homogene koncentrische Hohlkugel, die zur Erde abgeleitet ist.

Man denke sich im Mittelpunkte einer aus leitendem Material bestehenden koncentrischen Hohlkugel, die durch einen Draht KL mit der Erde in Verbindung steht, einen kleinen kugelförmigen Konduktor angebracht, der auf irgend eine Art mit der positiv elektrischen Menge $+E$ geladen wird (z. B. durch einen Draht, der isoliert durch eine Öffnung der Kugel tritt, zu vermitteln). Sobald die Ladung geschehen ist, tritt folgendes ein. Jedes Molekül der Hohlkugel enthält ursprünglich beide Arten von Elektrizität in gleichen Mengen, deren Wirkungen sich bisher aufhoben. Jetzt wird die negative nach M hingezogen, die positive abgestofsen, und zwar fliefst die letztere zur Erde ab, während die erstere sich in homogener Anordnung an der Innenwand ansammelt. Wie lange dauert dieser Prozefs an? So lange, bis die an der Innenwand angesammelte negative Influenzelektrizität (Infl. El. 1. Art) die Wirkung des Konduktors auf die Elektrizitäten der Schale aufhebt. Nun wirkt der Konduktor dorthin mit der Kraft $\frac{E}{r^2}$, die Influenzelektrizität $-E_1$ mit der Kraft $-\frac{E_1}{r^2}$, es mufs also $\frac{E}{r^2}-\frac{E_1}{r^2}=0$, d. h. $E=E_1$ sein. Die Menge der Influenzelektrizität erster Art ist also gleich der Ladung des Konduktors. Ebenso grofs ist die Menge der zur Erde abgeflossenen Influenzelektrizität zweiter Art.

Fig. 46.



Weil nach Vollendung der Scheidung Ruhe herrscht, ist im Metall der Schale das Potential konstant. Dasselbe Potential mufs aus demselben Grunde in dem Drahte und der mit ihr in Verbindung stehenden Erde, oder wenn der Draht bis in unendliche Entfernung reicht, in dem unendlich fernen Bereiche herrschen.

Wie man beim Thermometer einen willkürlichen Nullpunkt annimmt, so kann man auch bei der Zählung der Potentialwerte einen solchen Nullpunkt willkürlich wählen. Man pflegt das Potential der Erde gleich Null zu setzen. Weil jetzt dort das Potential gleich Null ist, mufs es auch im Metall der Kugel gleich Null sein, ebenso auch im Aufsenraume der Kugel, wenn sich dort nichts Störendes befindet. Die mittlere Dichte der Influenzelektrizität ist $\delta = -\frac{E_1}{4\varrho_1^2\pi}$, wenn ϱ_1 der innere Radius der Hohlkugel ist, und zwar ist $E_1 = E$, d. h. auf der Flächeneinheit befindet sich die Elektrizitätsmenge $\delta = -\frac{E}{4\varrho_1^2\pi}$. Nun wirkt aber die $+E$ des inneren Konduktors auf die Einheit der Menge der Influenzelektrizität mit der Kraft $p = \frac{E}{\varrho_1^2}$, zugleich ist nach obigem

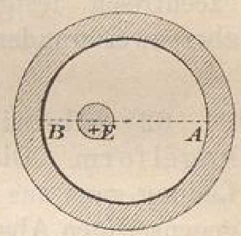
$$4\pi\delta = \frac{E}{\varrho_1^2}$$

(absolut genommen), also ist $p = 4\pi\delta$, oder $\delta = \frac{p}{4\pi}$, d. h. die anziehende Kraft p des Konduktors auf die elektrische Einheit ist das 4π-fache der mittleren Dichte der Influenzelektrizitäten, δ und p sind also proportionale Gröfsen.

Wird δ als Flächenbelegung betrachtet, also zweidimensional aufgefafst, so mufs es aus Symmetriegründen überall konstant sein. Denkt man es sich allerdings räumlich aufgelagert, so ist die Dichtigkeit in radialer Richtung verschieden. Betrachtet man z. B. in Fig. 46 eine Masseneinheit A der innersten Lage, so ergiebt sich, dafs dieses Teilchen von M mit der Kraft $p = \frac{m_1}{\varrho_1^2}$ nach links gezogen wird. Aufserdem wird es mit irgend einer Kraft q_l nach rechts abgestofsen, nämlich von aller links von der Tangentialebene BC liegenden Influenzelektrizität, dagegen mit einer Kraft q_r nach links von der rechts von BC lagernden Influenzelektrizität. Der Druck ist also von der Gröfse $p - (q_l - q_r)$. Nun ist aber $(q_l - q_r) = 0$ (nach dem Gesetze der Hohlkugel), demnach ist der Druck gleich $p = \frac{E}{\varrho_1^2}$. Dagegen wird die äufserste Schicht D von zwei Kräften nach links und rechts gepreſst, von $p = \frac{E}{\varrho_1^2}$ und von $q = \frac{-E}{\varrho_1^2}$, wobei ϱ_1 fast dasselbe ist, wie vorher. Beide Kräfte heben sich auf, der Druck bei D ist also Null. In radialer Richtung also nimmt der Druck schnell von p zu Null ab. Entsprechendes muſs mit der Dichte geschehen, so daſs das obige δ nur eine mittlere Dichte war. Die räumlich aufgefaſste elektrische Einheit von Höhe AD wird also nur von einem zwischen p und 0 liegenden Drucke gegen die Wand gedrückt. Nimmt man bei der unendlich geringen Dicke der Schicht das Mittel an, so ist an Stelle des Druckes $p = 4\pi\delta$ die Hälfte $2\pi\delta$ zu setzen. Da ferner δ die Menge pro Flächeneinheit ist, so wirkt auf der Flächeneinheit der Druck $2\pi\delta \cdot \delta = 2\pi\delta^2$, den man als die Oberflächenspannung bezeichnet. Die Oberflächenspannung ist also proportional dem Quadrate der Dichte oder auch proportional dem Produkte aus p und δ, oder dem Quadrate von p. Auf die graphische Darstellung des Potentials kommen wir in Nr. 72 zurück.

61) Vorläufige Bemerkung über die excentrische Lage des Konduktors. Die Ruhelage ist nur dadurch möglich, daſs die an jedem Teilchen der Influenzelektrizität wirkende Kraftresultante senkrecht gegen die Fläche steht. Bringt man den Konduktor in excentrische Lage, so wirkt er am stärksten auf B, am schwächsten auf A, auf diese Stellen senkrecht, auf alle anderen schräg, folglich treten sofort Verschiebungen auf. Später soll gezeigt werden, daſs dann die Dichtigkeit der Influenzelektrizität umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung des Mittelpunktes des klein zu denkenden Konduktors $+E$ von der Innenfläche der Hohlkugel ist. Dies stimmt mit dem Störungsgesetz überein (dritte Potenzen der umgekehrten Entfernung). Ruhe tritt nämlich erst dann ein, wenn wieder alle Resultanten, die an den Influenzteilchen wirken, senkrecht gegen die Innenfläche stehen.

Fig. 47.



Nun könnte ja der Fall eintreten, daſs $+E$ bei dieser neuen Lage mehr Influenzelektrizität festhalten könnte, oder daſs es einen Teil loslassen müſste. Daſs dies nicht der Fall sein wird, läſst sich schon hier zeigen. Wiederum muſs im Metall der Hohlkugel auſserhalb der Belegung das Potential Null herrschen, d. h. die Wirkungen beider Elektrizitäten nach auſsen heben einander auf. Für gröſsere Entfernungen aber ist es gleichgültig, ob man sich ihre Teilchen so, wie augenblicklich, oder in einem einzigen Punkte koncentriert denkt, denn es ist, wenn e die gröſste der dazu nötigen Verschiebungen bedeutet, $\frac{1}{(r+e)^2} = \frac{1}{r^2\left(1+\frac{e}{r}\right)^2}$. Ist nun $\frac{e}{r}$ sehr klein, z. B. gleich $\frac{1}{10^6}$, so geht der Ausdruck über in

$$\frac{1}{r^2\left(1+\frac{2}{10^6}+\frac{1}{10^{12}}\right)} = \frac{1}{r^2[1{,}000\,002\,000\,001]},$$

so dafs man bei einer Genauigkeit auf 5 Stellen $\frac{1}{r^2}$ dafür schreiben darf. Die endliche Entfernung e kommt also gegen r gar nicht in Betracht. Wäre nun die Menge $-E_1$ verschieden von der Menge $+E$, so würde in jener Entfernung das Potential gleich $\frac{E-E_1}{r^2}$ sein. Es ist aber gleich Null, also müssen beide Mengen gleich sein. Der Schlufs wird um so zwingender, weil er für jede beliebige Stelle des Raumes gilt. Also auch bei excentrischer Lage ist die Menge der Influenzelektrizität erster Art gleich der der Ladung des Konduktors. Dieses Problem kommt später noch einmal zur Sprache. Dort wird sich zeigen, dafs der Mittelpunkt des kleinen Konduktors der Schwerpunkt für die Teilchen der Influenzelektrizität ist.

Angenommen, die Erde sei eine koncentrische Hohlkugel, in der sich ein solcher Kernkörper befindet, so würden die Tiefenverhältnisse des Oceans sich in ähnlicher Weise ändern, wenn der Kernkörper excentrisch festgelegt würde. Ein dort kreisender Mond würde aber zwei wandernde Flutberge erzeugen.

62) Alleinige Ladung des Leiters von Kugel- oder Hohlkugelform. Die Verbindung mit der Erde werde aufgehoben, die Ladung ganz aus der Mitte entfernt, was wird geschehen? Infolge der gegenseitigen Abstofsungen sprühen die Teilchen der Influenzelektrizität auseinander. Sie würden nach der Erde abfliefsen, wenn die Verbindung noch da wäre. So aber können sie nur bis zur Oberfläche der Kugel fliefsen, wo sie sich so anordnen müssen, dafs alle Resultanten senkrecht gegen diese Fläche gerichtet sind. Dies ist nur möglich bei gleichmäfsiger Verteilung. Die mittlere Dichte wird $\delta = \frac{E}{4\varrho_2^2\pi}$, wo E die Ladung, ϱ_2 der äufsere Radius ist. Die äufsersten Schichten werden pro Masseneinheit mit der Kraft $p = \frac{E}{\varrho_2^2}$ abgestofsen, die innersten wieder mit Null, beides nach den Gesetzen der Hohlkugel, der Mitteldruck kann als $\frac{p}{2}$ angenommen werden. Auf die Flächeneinheit, wo die Masse δ lagert, hat man also den Druck $\frac{p}{2}\delta$, oder

da $p = 4\pi\delta$ ist, den Druck $2\pi\delta^2$, der wieder als Oberflächenspannung bezeichnet wird. Ist die Kugel massiv, so gilt von einer auf sie gebrachten elektrischen Ladung dasselbe.

63) Centrische Influenz auf die isolierte Hohlkugel. Der in M liegende Konduktor sei mit $+E$ geladen, die Influenz tritt auf der nicht abgeleiteten Hohlkugel ein und schafft $-E_1$ an die Innenfläche, ebenso viel $+E_2$ an die Aufsenfläche. Die Dichte wird auf jeder Fläche überall gleichmäfsig, aufsen natürlich kleiner als innen, dabei übt $+E_2$ nach innen die Wirkung Null aus (Kugelschale), $+E$ und $-E_1$ üben, da Gleichgewicht herrscht, auf die Punkte des Metalls aufserhalb der inneren Belegung beim Ruhezustande auch die Wirkung Null aus, und da diese Wirkung gleich $\frac{E}{r^2} - \frac{E_1}{r^2}$ ist, so mufs $+E = +E_1$ und nun ebenso $+E = +E_2$ sein. Folglich:

Aufserhalb der Hohlkugel ist das Potential gleich

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} + \frac{E_2}{r} = \frac{E}{r},$$

also so grofs, als ob nur die innerste, oder nur die äufserste der drei Elektrizitäten da wäre.

Im Metall der Hohlkugel ist das Potential

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} + \frac{E}{\varrho_2} = \frac{E}{\varrho_2}.$$

Zwischen Konduktor und Hohlkugel ist das Potential gleich

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{\varrho_1} + \frac{E}{\varrho_2} = E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right);$$

im Innern des Konduktors ist es gleich

$$\frac{E}{\varrho} - \frac{E_1}{\varrho_1} + \frac{E}{\varrho_2} = E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Die Radien sind der Gröfse nach gleich ϱ, ϱ_1, ϱ_2 gesetzt.

Bringt man den Konduktor in excentrische Lage, so wirken $+E$ und $-E_1$ auf das Metall der Hohlkugel wieder mit der Kraft Null, die äufsere Elektrizität $+E_1$ ordnet sich also so an, als ob die beiden andern nicht da wären. Dieser Fall kommt noch genauer zur Sprache, da er auf die interessante Theorie der centrobarischen Körper führt.

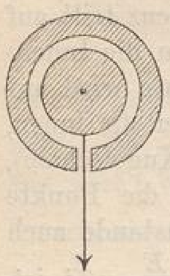
Leitet man die Schale ab, so ist das Potential innerhalb des Kernes gleich

$$E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1}.$$

64) Die innere Kugel sei nach der Erde abgeleitet. Die Radien seien der Reihe nach ϱ, ϱ_1 und ϱ_2, die Ladung der Aufsen-

schale sei $+E$. Durch die Verbindung mit der Erde herrsche im Innern des Kerns das Potential Null. Die Ladung $+E$ sammelt sich an der Innenwand der Schale, die Influenzelektrizität $-E_1$ an der Aufsenwand des Kerns an. Da aber im Innern des letzteren $\frac{E}{\varrho_1} - \frac{E_1}{\varrho} = 0$ sein mufs, ist jetzt $E_1 = \frac{\varrho}{\varrho_1} E$. Die Influenzelektrizität ist also von geringerer Menge, als die Ladungselektrizität, und zwar ist das Verhältnis der Radien mafsgebend. Für äufsere Punkte wird das Potential gleich

Fig. 48.



$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} = \frac{E}{r} - \frac{\varrho}{\varrho_1} E \cdot \frac{1}{r} = \frac{E}{r} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}.$$

Bei den besprochenen Influenzproblemen enthält das Dielektrikum nur da Kraftröhren, wo das Potential veränderlich ist. Stimmen $+E$ und $-E_1$ in der Menge überein, und ist E_2 abgeleitet, so befinden sich sämtliche Kraftröhren zwischen den beiden Leitern. Sind wie im letzten Falle die Mengen verschieden, so geht der von der gröfseren Menge herrührende Überschufs von Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche. Entsprechendes findet bei den später zu behandelnden Mehrpunktproblemen statt. An den beiden Enden jeder Kraftlinie sind also stets gleiche Mengen von Elektrizität aufgespeichert.

65) **Aufgabe.** Für den Fall koncentrischer Kugelschalen, von denen die eine abgeleitet ist, soll die potentielle Energie der Ladung berechnet werden.

a) Die Schale sei leitend mit der Erde verbunden, der Kern mit E geladen, so dafs $E_1 = E$ ist.

Um die Einheit positiver Elektrizität aus unendlicher Entfernung nach dem Kern zu bringen, braucht man, nachdem er mit E geladen ist, bis an die Innenbelegung $-E_1$ der Schale die Arbeit Null. Von dort bis zum Rande des Kernes steigt der Potentialwert auf $\frac{E}{\varrho} - \frac{E_1}{\varrho_1} = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1}$. Im Anfang war dazu nur die Arbeit Null nötig. Da die Arbeit proportional E ist, ist der Mittelwert für die nötige Arbeit gleich $E\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho\varrho_1}$. Um jedoch nicht die Einheit, sondern die Ladung $+E$ nach dem Kern zu schaffen, ist die Efache Arbeit nötig, die geleistete Arbeit ist also

$$\text{Energie} = E^2\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho\varrho_1}.$$

Sie ist proportional dem Quadrate der Ladung und dem Quotienten aus der Differenz und dem Produkte der inneren Radien. Das Potential innerhalb des Kerns war nach Nr. 63

$$V = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1},$$

also ist

$$E = V\frac{\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}$$

und daher

$$\text{Energie} = E^2\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho\varrho_1} = V^2\frac{\varrho^2\varrho_1^2}{(\varrho_1 - \varrho)^2}\cdot\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho\varrho_1} = V^2\frac{\varrho\varrho_1}{2(\varrho_1 - \varrho)}.$$

Demnach ist die aufgespeicherte Energie auch proportional dem Quadrate des Potentials im Innern des Kerns.

b) Der Kern sei leitend mit der Erde verbunden. In diesem Falle ist das Potential auf der Kugelschale gleich $\frac{E}{\varrho_2}\cdot\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}$, also, wenn sie sehr dünn ist, gleich $E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1^2}$. Daraus folgt als Energie ähnlich, wie vorher, durch Multiplikation des halben Endwertes mit E,

$$E^2\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho_1^2} \quad \text{oder} \quad V^2\frac{\varrho_1^2}{2(\varrho_1 - \varrho)}.$$

66) Begriff der Kapazität. Den Quotienten aus Ladung und Potential eines Leiters bezeichnet man als seine Kapazität, also $K = \frac{E}{V}$. Nun ist aber E dividiert durch V die auf die Einheit des Potentials reduzierte Ladung. Folglich:

Unter Kapazität eines Leiters versteht man diejenige elektrische Ladung, die nötig ist, um sein Potential um 1 zu erhöhen, also z. B. von 0 auf 1 zu bringen.

(Die Definition gilt vorläufig nur von der Kugelgestalt, denn für allgemeinere Gestalten mufs erst nachgewiesen werden, dafs das Potential proportional der Ladung, also die Kapazität bei fortgesetzter Ladung dieselbe ist. Bei der Kugel ist es der Fall.)

Für die allein im Raume befindlichen Leiter von der Gestalt einer Kugel oder Kugelschale ist

$$K = \frac{E}{\left(\frac{E}{\varrho}\right)} = \varrho,$$

sie ist also gleich dem Radius der Kugel oder Kugelschale, möge das Material des Leiters sein, welches es wolle.

Ist die Ladung $= 1$ (z. B. in Coulomb), das Pontential $= 1$ (z. B. in Volt), so ist die Kapazität $= 1$ (im Beispiel gleich ein Farad), zugleich bei der Kugel der Radius $= 1$ cm. Über diese Einheiten vergl. Anhang.

Setzt man den Radius der Erde gleich $6{,}37 \cdot 10^8$ cm (der Äquatorradius ist gleich 6 377 397 m, der Polradius gleich 6 356 079 m), so folgt, daſs die Kapazität gleich $6{,}37 \cdot 10^8$ ist, d. h. $6{,}37 \cdot 10^8$ mal so groſs, als die Kapazität einer Kugel vom Radius 1 cm. Mit andern Worten, um das Potential des Erdballes von 0 auf 1 Volt zu bringen, ist eine Ladung von 637 000 000 Coulomb nötig.

67) Einfluſs benachbarter Leiter auf die Kapazität.

Ganz anders aber wird es, wenn der kugelförmige Leiter nicht allein im Raume ist. Ist er z. B. von einer abgeleiteten Kugelschale umschlossen, so ist nach obigem das Potential $V = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1}$, also die Kapazität

$$K = \frac{E}{V} = \frac{\varrho\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho},$$

also wenn ϱ_1 sehr wenig von ϱ verschieden ist,

$$K = \frac{\varrho^2}{\varrho_1 - \varrho} = \frac{4\varrho^2\pi}{4(\varrho_1 - \varrho)} = \frac{O}{4(\varrho_1 - \varrho)}.$$

Die Kapazität ist also jetzt proportional der Oberfläche des Kerns und umgekehrt proportional der Differenz der Radien, d. h. der Dicke der isolierenden Schicht.

Die Arbeit des Ladens mit einer elektrischen Einheit ist eben jetzt nur $E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$, während sie vorher $E\frac{1}{\varrho}$ war. Man kann also mit weit geringerem Aufwande von Arbeit eine groſse Menge elektrischer Energie im Kerne aufspeichern.

Dies ist, von der besonderen Gestalt abgesehen, der Fall der Leydener Flasche und überhaupt jedes sogenannten Kondensators oder Verstärkungsapparats. Bei der Entladung kommt diese Energie (abgesehen vom elektrischen Rückstande) wieder zur Erscheinung, sei es als Licht-, Wärme- und Schallerscheinung des elektrischen Funkens, oder als mechanische Arbeit desselben beim Durchschlagen von Nichtleitern, als Erwärmung des Drahtes u. s. w.

Entsprechendes gilt von dem Falle, daſs der Kern mit der Erde leitend verbunden ist. Ist dagegen keine Ableitung zur Erde vorhanden, so handelt es sich um dieselbe Arbeit, wie bei der allein im Raume befindlichen Kugel, denn die Wirkungen von $-E_1$ und $+E_2$ heben sich nach auſsen auf, so daſs die von $+E$ voll zu überwinden ist.

Handelt es sich nicht um einen umschlieſsenden, sondern um einen benachbarten Leiter, so braucht letzterer nicht abgeleitet zu sein, und er kann, wie sich später zeigen wird, doch die Kapazität der Kugel vergröſsern.

Man kann die Kapazität einer Leydener Flasche dadurch verstärken, daſs man die Oberfläche des Kerns sehr groſs und die Glasstärke sehr klein macht. Die Oberfläche läfst sich auch durch Kombinieren mehrerer Flaschen zu einer Batterie erheblich verstärken. Darüber soll später gesprochen werden.

68) Die Dielektrizitätskonstante eines isolierenden Mittels. Auch die Umgebung, d. h. das isolierende Mittel, ist auf die Kapazität von Einflufs. Ist z. B. eine Kugel von $\varrho = 1$ cm von Luft umgeben, so erhält sie durch die Ladung 1 Coulomb das Potential 1 Volt. Ist aber die Umgebung z. B. Schwefelkohlenstoff, so bringt die Ladung 1 Coulomb nur das Potential $\frac{1}{1{,}8}$ Volt hervor, die Kapazität ist also die 1,8 fache, die Energie der Ladung die $\frac{1}{1{,}8}$ fache. Diese Zahl nennt man die Dielektrizitäts-Konstante oder das spezifische Induktionsvermögen des Schwefelkohlenstoffs. Sie ist insofern wichtig, als auf einem benachbarten Leiter auch die 1,8 fache Menge von Influenzelektrizität hervorgerufen wird, wenn die Umgebung Schwefelkohlenstoff ist. An den elektrischen Vorgängen sind also die isolierenden Mittel, die Dielektrika, wesentlich beteiligt. Dies war einer der Ausgangspunkte für die Faraday-Maxwellschen Theorien.

Die elektrische Kapazität ist ganz analog der Wärmekapazität oder der spezifischen Wärme. Trotzdem besteht nach obigem ein grofser Unterschied. Die Kapazität bezüglich der Wärme ist nur vom Stoff abhängig, um den es sich handelt; die elektrische Kapazität dagegen ist unabhängig vom Stoff des Leiters, dagegen abhängig vom Stoff des isolierenden Mittels, aufserdem abhängig von der Form und Gröfse des Leiters, ebenso von der Nachbarschaft isolierter oder abgeleiteter Leiter. — Wird in folgendem nichts Besondere gesagt, so ist stets Luft als isolierendes Mittel angenommen.

69) Dichtigkeit der Ladungen auf einem System verbundener Kugeln.

Ladet man ein System von Kugeln, die durch sehr dünne Drähte miteinander verbunden und so weit voneinander entfernt sind, dafs keine wesentlichen Influenzwirkungen entstehen, so tritt folgendes ein. Nach Eintritt des Ruhezustandes ist das Potential innerhalb des ganzen Systems konstant gleich V. Für zwei Kugeln folgt bezüglich der Kapazität $K_1 = \frac{L_1}{V}$, $K_2 = \frac{L_2}{V}$, folglich $\frac{K_1}{K_2} = \frac{L_1}{L_2}$, d. h. die Ladungen der beiden Kugeln sind proportional ihren Kapazitäten. Nun ist aber nach obigem $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, es folgt also $\frac{L_1}{L_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$, d. h. die Ladungen der beiden Kugeln verhalten sich wie ihre Radien. Nun sind aber die Dichtigkeiten $\delta_1 = \frac{L_1}{4\varrho_1^2\pi}$, $\delta_2 = \frac{L_2}{4\varrho_2^2\pi}$, folglich ist

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1},$$

folglich:

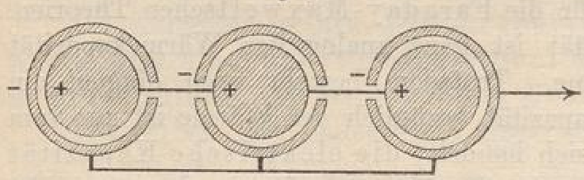
Die Dichtigkeiten der Ladungen verhalten sich umgekehrt wie die Radien.

Ist eine der Kugeln sehr klein, so wird die Dichtigkeit δ und damit die Oberflächenspannung $2\pi\delta^2$ so grofs, dafs die bekannte büschelförmige Ausstrahlung eintritt, die naturgemäfs bei Spitzen am stärksten hervortreten wird. Mit feineren Hülfsmitteln läfst sich beweisen, dafs bei Ladung eines beliebig gestalteten Konduktors die Dichte der Belegung umgekehrt proportional dem Krümmungsradius ist.

70) Batterie Leydener Flaschen, nebeneinander geschaltet.

Mehrere kugelförmige Leydener Flaschen vom Innenradius r und Aufsenradius ϱ und von der Glasdicke $d = \varrho - r$ mögen so verbunden werden, dafs alle Kerne unter sich und alle Schalen unter sich kommunizieren. Die letzte Schale sei nach der Erde abgeleitet. Befindet sich auf jedem Kerne die Ladung $+E$, so ist die Gesamtladung gleich nE. Das Potential der abgeleiteten Schalen ist Null. Das Potential jedes Kernes ist

Fig. 49.



$$V = \frac{E}{r} - \frac{E_1}{\varrho} = E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) = E\frac{\varrho - r}{r\varrho} = \frac{Ed}{r\varrho}.$$

Liegen nämlich die Flaschen so weit auseinander, dafs man von der Influenzwirkung der einen auf die anderen absehen kann, so darf man wie früher E_1 absolut gleich E setzen. Der Draht ist so dünn zu denken, dafs die auf ihm befindliche Elektrizität aufser Acht bleiben kann. Aus $V = \frac{Ed}{r\varrho}$ folgt $E = \frac{Vr\varrho}{d}$, also ist die Gesamtladung gleich

$$nE = \frac{nVr\varrho}{d}.$$

Die Energie der Ladung jedes Kernes ist gleich

$$E^2 \cdot \frac{\varrho - r}{2\varrho r} = \frac{E^2 d}{2\varrho r},$$

also die gesamte Energie gleich $n\frac{E^2 d}{2\varrho r}$ oder auch gleich

$$\frac{n}{2}\cdot\frac{V^2r^2\varrho^2}{d^2}\cdot\frac{d}{\varrho r}=\frac{n}{2}\frac{V^2r\varrho}{d}.$$

Die Energie der Ladung ist also proportional dem Quadrate der Ladung oder auch dem Quadrate des Potentials.

Sie ist aber auch abhängig von $r\varrho$ und d. Ist d sehr klein gegen r und ϱ, so kann man $r\varrho = r(r+d) = r^2 + rd$ gleich r^2 setzen $\left[r\varrho = r^2\left(1+\frac{d}{r}\right) = r^2 \text{ für } \frac{d}{r} = o\right]$. Dann ist die Energie gleich

$$nE^2\frac{d}{2r^2} = \frac{2nE^2d\pi}{4r^2\pi} = \frac{2nE^2d\pi}{O}$$

$$\text{bezw. } \frac{nV^2r^2}{2d} = \frac{4nV^2r^2\pi}{8\pi d} = \frac{nV^2O}{8\pi d},$$

wo O die Oberfläche ist. Stimmen demnach in zwei Fällen die Ladungen überein, so ist die Energie proportional der Glasdicke d und umgekehrt proportional der Fläche der inneren Kugelschalen. Ist dagegen das Potential in zwei Fällen dasselbe, so ist die Energie proportional der Oberfläche nO und umgekehrt proportional der Glasdicke.

Die Kapazität ist gleich

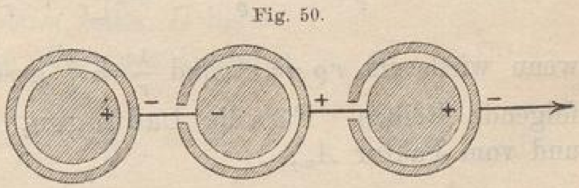
$$\frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}} = \frac{nE}{\left(\frac{Ed}{r\varrho}\right)} = \frac{nr\varrho}{d},$$

also das $n$fache der Kapazität einer einzelnen Flasche.

71) Batterie Leydener Flaschen, nacheinander geschaltet. (Franklinsche oder Kaskaden-Batterie.)

Alle inneren Radien seien gleich r, alle äufseren gleich ϱ, die Innenladungen seien $J_1, J_2, J_3 \ldots$, alle äufseren $-A_1, -A_2, -A_3, \ldots$, die Innenpotentiale $V_1, V_2, V_3, \ldots$, die Aufsenpotentiale $U_1, U_2, U_3, \ldots$ Jede Schale sei mit dem benachbarten Kern, die eine Schale mit der Erde verbunden. Die Glasdicke sei wieder d. Die nach Ladung der ersten Kugel mit J_1 sich bildenden Influenzelektrizitäten sind, da bei der Scheidung jedesmal gleiche Mengen sich trennen, paarweise gleich, also $-A_1 = -J_2$, $-A_2 = -J_3$, $\ldots$, $-A_{n-1} = -J_n$. Der Verbindungen wegen sind ebenso je zwei Potentiale einander gleich. $U_1 = V_2$, $U_2 = V_3$, $\ldots$, $U_{n-1} = V_n$, nur das letzte U_n ist gleich Null, weil die Schale

Fig. 50.



mit der Erde verbunden ist. Von dort werde angefangen. Zunächst ist absolut genommen $A_{n-1} = J_n = A_n$, und $U_n = 0$. Dagegen

$$V_n = \frac{J_n}{r} - \frac{A_n}{\varrho} = A_n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) = A_n \frac{\varrho - r}{r\varrho} = A_n \frac{d}{r\varrho}.$$

Ebenso grofs ist U_{n-1}. Aus

$$U_{n-1} = \frac{J_{n-1}}{\varrho} - \frac{A_{n-1}}{\varrho}$$

folgt

$$J_{n-1} = \varrho\, U_{n-1} + A_{n-1} = \varrho A_n \frac{d}{r\varrho} + A_n = A_n\left(1 + \frac{d}{r}\right).$$

Ebenso grofs ist absolut genommen A_{n-2}. Es folgt

$$V_{n-1} = \frac{J_{n-1}}{r} - \frac{A_{n-1}}{\varrho} = \frac{A_n}{r}\left(1 + \frac{d}{r}\right) - \frac{A_n}{\varrho} = A_n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{d}{r^2}\right)$$

$$= A_n\left(\frac{d}{r\varrho} + \frac{d}{r^2}\right),$$

also wenn man angenähert $r\varrho = r^2$ setzt,

$$V_{n-1} = 2\, A_n \frac{d}{r^2}.$$

Ebenso grofs ist U_{n-2}. Aus

$$U_{n-2} = \frac{J_{n-2}}{\varrho} - \frac{A_{n-2}}{\varrho}$$

folgt

$$J_{n-2} = \varrho\, U_{n-2} + A_{n-2}$$

oder

$$J_{n-2} = \varrho \cdot 2\, A_n \frac{d}{r^2} + A_n\left(1 + \frac{d}{r}\right) = 2\, A_n\left(1 + \frac{3\,d}{r}\right),$$

wenn man $\frac{\varrho}{r}$ angenähert gleich 1 setzt. Es folgt

$$V_{n-2} = \frac{J_{n-2}}{r} - \frac{A_{n-2}}{\varrho} = A_n\left[\frac{1}{r} + \frac{3\,d}{r^2} - \frac{1}{\varrho} - \frac{d}{r\varrho}\right] = 3\, A_n \frac{d}{r^2},$$

wenn wiederum $r\varrho = r^2$ und $\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt wird. Man erhält also folgende Reihen. Für die Ladungen, abgesehen vom Vorzeichen und vom Faktor A_n,

$$1,\quad 1 + \frac{d}{r},\quad 1 + \frac{3\,d}{r},\quad 1 + \frac{6\,d}{r},\quad 1 + \frac{10\,d}{r},\ \ldots,\quad 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{d}{r}.$$

[Die Differenzen sind nämlich der Reihe nach $\frac{d}{r}, \frac{2\,d}{r}, \frac{3\,d}{r}, \ldots, \frac{(n-1)\,d}{r}$, die Faktoren von $\frac{d}{r}$ der Reihe nach $1,\ 1+2,\ 1+2+3,$

$\ldots, 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, das letzte Glied also $1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{d}{r} \cdot$] Für die Potentiale aber erhält man die Reihe

$$0, \quad \frac{d}{r^2} A_n, \quad \frac{2d}{r^2} A_n, \quad \frac{3d}{r^2} A_n, \ldots, \frac{nd}{r^2} A_n.$$

Nun ist aber nicht die letzte Ladung A_n, sondern die erste Innenladung gegeben, für welche

$$J_1 = \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}\right) A_n$$

gilt. Demnach ist

$$+ A_n = \frac{J_1}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}},$$

und dieser Wert ist in die gefundene Reihe einzusetzen. Die Potentialdifferenz zwischen dem ersten Kern und der letzten Schale ist also

$$D = \frac{nd}{r^2} A_n - 0 = \frac{nd}{r^2} \cdot \frac{J_1}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}$$

gegen

$$D = \frac{Ed}{r^2} = \frac{J_1 d}{r^2}$$

im Falle der vorher besprochenen Schaltung, d. h. sie ist $\frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}$ mal so grofs. Dieser Ausdruck kann $< 1, = 1, > 1$ sein. Setzt man ihn gleich 1, so erhält man $n = 1$, bezw. $n_1 = \frac{2r}{d}$. Dies sagt aus:

Bei $n = 1$ hat man eine gewisse Potentialdifferenz D zwischen Kern und Schale. Vermehrt man die Zahl der Flaschen, so wächst die Potentialdifferenz, erreicht einen Höchstwert, nimmt bis $n_1 = \frac{2r}{d}$ wieder zu D ab und sinkt dann unter D herab.

Welches ist der höchste Wert des Faktors?

Man setze

$$\frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}} = c,$$

woraus folgt

$$n = \frac{dc + 2r}{2dc} \pm \sqrt{\frac{(dc + 2r)^2}{4d^2c^2} - \frac{2r}{d} \cdot \frac{4dc^2}{4dc^2}}.$$

Soll nun n reell sein, so darf der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ werden. Er wird gleich Null, sobald

$$(dc + 2r)^2 = 8rdc^2$$

oder

$$dc + 2r = c\sqrt{8dr}$$

ist. Dies giebt den Grenzwert

$$c = \frac{2r}{\sqrt{8dr} - d}.$$

Setzt man diesen in die Gleichung für n ein, so fällt die Wurzel weg und man erhält

$$n = \frac{dc + 2r}{2dc} = \frac{d\frac{2r}{\sqrt{8dr} - d} + 2r}{2dc} = \sqrt{\frac{2r}{d}}.$$

Setzt man also die Anzahl der Flaschen gleich $\sqrt{\frac{2r}{d}}$, so erhält der Faktor $\frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}$ entweder einen gröfsten oder einen kleinsten Wert. Nachbarwerte zeigen, dafs es sich um einen Höchstwert handelt, d. h. um diejenige Flaschenzahl der Batterie, die die gröfste Potentialdifferenz ergiebt. Bei gebrochenem n wählt man die nächste ganze Zahl.

Hier bedeutet nun r den Radius der inneren Kugeln, d die Glasdicke. Ist beispielsweise der Radius r das 32fache der Glasdicke, so ist

$$n = \sqrt{\frac{2 \cdot 32\,d}{d}} = \sqrt{64} = 8.$$

In diesem Falle geben demnach 8 Flaschen den Höchstwert der Potentialdifferenz, der nun $\frac{8}{1 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{32}} = \frac{64}{15}$ mal so grofs ist, als bei der Schaltung nebeneinander und bei gleicher Ladung der ersten Flasche.

Der Potentialwert des ersten Kernes

$$V_1 = \frac{nd}{r^2} A_n = \frac{ndJ_1}{r^2\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\right)}$$

giebt an, wie viel Arbeit es am Schlusse macht, die elektrische Menge 1 positiver Art auf diese Kugel zu bringen, was anfangs die Arbeit Null beanspruchte. Während des ganzen Verlaufs war diese Arbeit proportional der Flaschenzahl und der Ladung J_1, im Durchschnitt also handelt es sich für die elektrische Einheit um den Mittelwert $\frac{V}{2}$, für die Menge J_1 um die Durchschnittsarbeit

$$\frac{1}{2} V_1 J_1 = \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{n d J_1^2}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}.$$

Dies ist zugleich die Energie der Ladung der Kaskadenbatterie. Im obigen Falle $r = 32d$ erreicht sie den Höchstwert für 8 Flaschen. Er hat den Betrag

$$\frac{1}{2r^2} \cdot \frac{64}{15} d J_1^2 = \frac{32 d J_1^2}{15 r^2} = \frac{128 \pi d J_1^2}{15 O}.$$

Die Energie ist proportional dem Quadrate der Ladung der ersten Flasche. Der Höchstwert ist außerdem proportional dem Faktor $\frac{d}{O}$, wo d die Flaschendicke, O die Oberfläche jeder Innenkugel ist.

Ist $J = E$, d. h. ist die Ladung der ersten Kugel in beiden Schaltungsfällen dieselbe, ist ferner die Glasdicke und die Flaschenzahl dieselbe, so verhalten sich die aufgespeicherten Energiemengen bei Neben- und Kaskadenschaltung wie

$$\frac{n E^2 d}{2r^2} : \frac{n J_1^2 d}{2r^2\left[1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}\right]} \quad \text{oder wie} \quad 1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r} : 1.$$

Die erreichten Potentialdifferenzen dagegen verhalten sich wie

$$\frac{Ed}{r^2} : \frac{J_1 d}{r^2} \cdot \frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}} \quad \text{oder wie} \quad 1 : \frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}.$$

Bildet man für beide Fälle den Quotienten aus Energie und Potentialdifferenz, so findet man für den einen Fall $\frac{E}{2}$, für den andern $\frac{nJ_1}{2}$, das Verhältnis für beide Fälle ist also $1 : n$.

Um also dieselbe Potentialdifferenz zu erreichen, hat man im Falle der Kaskadenbatterie die n fache Arbeit nötig, wie bei der Nebenschaltung.

Man ist aber mit Hilfe des Machschen Kommutators imstande, eine Batterie mit geringem Aufwande zunächst unter Nebenschaltung zu laden und dann in eine Kaskadenbatterie zu verwandeln, worauf durch Influenzwirkung die Anordnung eine ganz andere wird. Während man aber bei der Kaskadenbatterie nur eine Elektrizitätsmenge E zur Ladung der ersten Flasche nötig hat, ist bei der Machschen Methode für jede Flasche so viel Ladung nötig, also die n fache Menge nE.

[Man vergleiche damit die Erscheinungen, welche bei galvanischen Batterien auftreten, sobald man nebeneinander oder nacheinander schaltet. Das eine Mal hat man $n$fache Strömungen und einfache Potentialdifferenz, das andere Mal des großen Widerstandes wegen einfache Strömungen aber $n$fache Potentialdifferenz.]

Die Gesamtladung der Innenkugeln ist nach der obigen Theorie, wenn man mit der n^{ten} beginnt,

$$A_n\Big[1+\Big(1+\frac{d}{r}\Big)+\Big(1+\frac{3d}{r}\Big)+\Big(1+\frac{6d}{r}\Big)+\Big(1+\frac{10d}{r}\Big)+\cdots$$
$$+\Big(1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\Big)\Big].$$

Die Reihe nimmt zu. Ist J_1 die Ladung der letzten (vorher ersten) Kugel, so ist offenbar die Summe der Ladungen kleiner, als nJ_1, also diese Elektrizitätsmenge kleiner als die bei entsprechender Nebenschaltung angesammelte Menge nJ_1.

Die Berechnung der Summe hat nur mathematischen Wert. Nach dem Method. Lehrbuch II, Seite 117, ergiebt sich

$$A_n\Big[n+\frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot2\cdot3}\frac{d}{r}\Big]=nA_n\Big[1+\frac{n^2-1}{1\cdot2\cdot3}\frac{d}{r}\Big]=nA_n\frac{6r+(n^2-1)d}{6r}$$
$$=\frac{nJ_1}{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}\cdot\frac{6r+(n^2-1)d}{6r}=\frac{n}{3}J_1\frac{6r+(n^2-1)d}{2r+n(n-1)d}.$$

Für sehr großes n strebt dies dem Werte $\frac{n}{3}J$ zu. Die Kapazität ist gleich $\frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}}$, also, da nur die erste Kugel geladen wird

$$\frac{\Big(1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\Big)r\varrho}{nd}=\frac{r\varrho}{nd}+\frac{n-1}{2}\varrho.$$

Da oben mehrfach $r\varrho = r^2$ gesetzt und die gegenseitige Influenz der Flaschen vernachläſsigt wurde, hat die Untersuchung nur den Wert einer informierenden Annäherungsbetrachtung, die immerhin über das Wesentliche aufklärt. Um diese Vernachlässigung zu charakterisieren, soll das Potential der ersten Flasche für äuſsere Punkte in der Entfernung R gebildet werden. Es ist gleich

$$\frac{J_1}{R}-\frac{A_1}{R}=\frac{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}{R}A_n-\frac{1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{d}{r}}{R}A_n=\frac{A_n}{R}\frac{d(n-1)}{r}$$
$$=\frac{J_1\,d(n-1)}{2r+n(n-1)d}\cdot\frac{1}{R}=\frac{J_1}{R}\cdot\frac{1}{n+2\frac{r}{d}\cdot\frac{1}{n-1}}.$$

Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen kleiner als $\frac{J_1}{nR}$, so dafs z. B. bei 10 Flaschen der Einflufs geringer ist, als $\frac{1}{10}$ des Einflusses der Ladung der Innenkugel allein. Ist z. B noch $r = 27\,d$, also der Durchmesser das 27fache der Glasdicke, so würde sein

$$\text{Potential} = \frac{J_1}{R} \cdot \frac{1}{10 + 54 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{16} \frac{J_1}{R}.$$

72) Eine andere Betrachtungsweise, die aber ebenso wenig genaue Resultate giebt, findet sich in einigen physikalischen Lehrbüchern. Dort wird die Ladung der ersten Innenflasche gleich E gesetzt, die Influenzelektrizität erster Art gleich $-mE$, wo m ein echter Bruch ist, weil die Influenzelektrizität zweiter Art nicht ins Unendliche abfliefsen konnte (auch nicht die beiden andern kugelförmig umgiebt) und durch ihre Anziehung hemmend auf die Scheidung einwirkt. Unter der vereinfachenden Annahme, dafs dieses m in allen Flaschen dasselbe sei, findet man als Gesamtladung

$$E(1 + m + m^2 + \cdots + m^{n-1}) = E\frac{1 - m^n}{1 - m},$$

was nun ebenfalls kleiner als nE ist. Dabei ist also an Stelle der arithmetischen Reihe höherer Ordnung eine einfachere geometrische getreten. Hier soll die weitere Berechnung nicht durchgeführt werden. Es handelte sich nur darum, den betreffenden Unterschied aufzuklären.

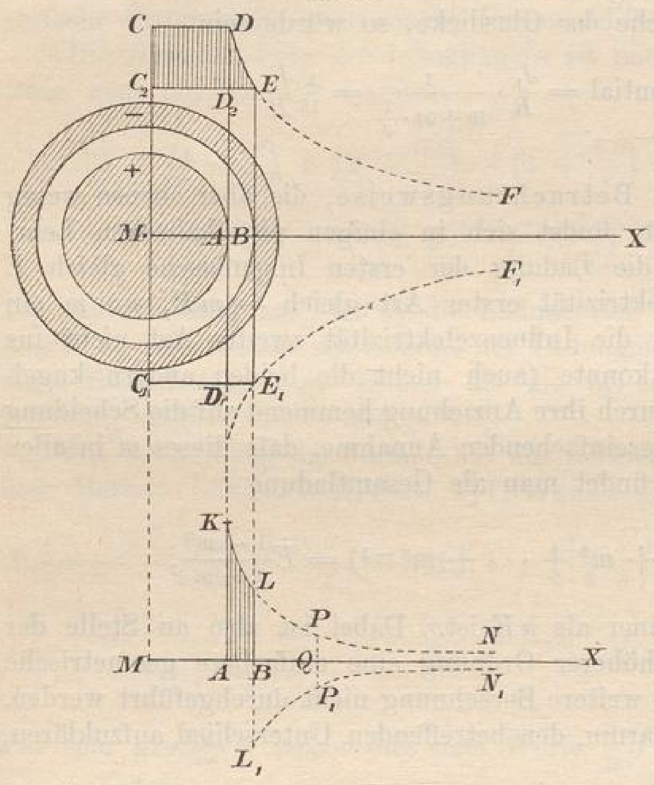
73) **Aufgabe.** Das Potential des geladenen kugelförmigen Kondensators graphisch darzustellen.

Auflösung. Sind die Radien wieder gleich ϱ, ϱ_1 (und ϱ_2), so handelt es sich nach Nr. 63 für Punkte innerhalb der inneren Kugel um

$$E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1} = \frac{Ed}{\varrho\varrho_1},$$

also um eine konstante Gröfse. Ist nun $MC = \frac{E}{\varrho}$ und $-MC_1 = \frac{-E}{\varrho_1}$, so ist $MC - MC_1$ oder C_2C die den Potentialwert darstellende Strecke. Sie gilt für das ganze Rechteck CDD_2C_2. Aufserhalb der inneren Kugel nimmt das Potential derselben ab nach dem Gesetz der gleichseitigen Hyperbel DEF, während von A bis B das Potential der Schale noch konstant gleich $-\frac{E}{\varrho_1}$ bleibt. Das Diagramm für die Innenkugel giebt eine Fläche $ABED$, von der ABD_1E_1 abzuziehen ist, so dafs eine Fläche DD_2E bleibt. Die Lote dieser Fläche geben die Potentialwerte zwischen A und B an. Für B wird der Potentialwert gleich Null. Für die aufserhalb der Schale liegenden Punkte der X-Achse ist der Potentialwert gleich Null, denn die Lote zweier übereinstimmender Hyperbeln sind voneinander abzuziehen. Die eine Hyperbel hat die Gleichung

Fig. 51.



$$xy = MADC = \frac{E}{\varrho} \cdot \varrho = E,$$

die andere die Gleichung

$$xy = MC_1E_1B = -\frac{E}{\varrho_1} \cdot \varrho_1 = -E.$$

Die Dichtigkeit auf der Innenkugel ist $\delta = \frac{E}{4\varrho^2\pi}$, die auf der Aufsenkugel

$$\delta_1 = -\frac{E}{4\varrho_1^2\pi} = -\delta\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}.$$

Setzt man $\varrho_1 = \varrho + \delta$, so kann man schreiben

$$\delta_1 = -\delta\frac{\varrho^2}{(\varrho+d)^2} = -\delta\frac{\varrho^2}{\varrho^2\left(1+\frac{d}{\varrho}\right)^2} = -\frac{\delta}{\left(1+\frac{d}{\varrho}\right)^2}.$$

Je kleiner $\frac{d}{\varrho}$ ist, um so weniger sind δ_1 und δ dem absoluten Betrage nach voneinander verschieden. Die Anziehung in A ist von der Stärke

$$\frac{E}{\varrho^2} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho^2} = 4\pi\delta,$$

an der Stelle B ist sie gleich $4\pi\delta\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}$. Zwischen A und B in beliebigem Abstande ist sie von der Stärke $y = \frac{4\pi\delta\varrho^2}{x^2}$. Dies ist die Gleichung der Gravitationskurve, welche das Arbeitsdiagramm $ABLK$ begrenzt, wie es in Figur 51 unten angebracht ist. Längs der

Strecke MA und längs der Horizontalen von B bis $+\infty$ ist die Diagrammhöhe gleich Null. Ist der Kern eine koncentrische Hohlkugel, so ist die Sache dieselbe.

74) Der Fall zweier unbegrenzten parallelen Ebenen. Man denke sich den Abstand d ebenso grofs wie vorher, die Radien ϱ und ϱ_1 aber sehr grofs. Soll δ dasselbe sein, wie vorher, so folgt aus $\frac{E}{4\varrho^2\pi} = \delta$, dafs die Ladung in dem Mafse verstärkt werden mufs, wie ϱ^2 vergröfsert worden ist. Dabei wird $\delta_1 = \delta$. Das Potentialdiagramm C_2BDC der letzten Figur fällt mit der Geraden C_2E sehr weit nach oben (BE ist proportional ϱ), DE wird geradlinig, also D_2ED ein rechtwinkliges Dreieck. Die Anziehung bei A bleibt von der Stärke $\frac{E}{\varrho^2} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho^2} = 4\pi\delta$, an der Stelle B wird sie gleich $4\pi\delta\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}$, also da $\varrho = \varrho_1$ wird, ebenfalls gleich $4\pi\delta$. Das Anziehungsdiagramm zwischen A und B wird also ein Rechteck vom Inhalte $4\pi\delta d = \frac{E}{\varrho^2}d$.

Denkt man sich die äufsere Kugel mit der Erde in Berührung, so ist auf ihr das Potential gleich Null. In A ist das Potential gleich $\frac{E}{\varrho} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho} = 4\varrho\pi\delta$, in $B = \frac{E}{\varrho_1}$, also ist die Potentialdifferenz gleich

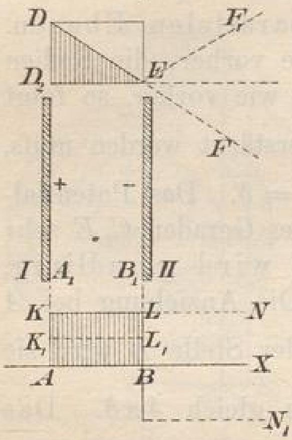
$$\frac{E}{\varrho} - \frac{E}{\varrho_1} = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1} = \frac{Ed}{\varrho\varrho_1},$$

also, da $\varrho = \varrho_1$ zu setzen ist, gleich $\frac{Ed}{\varrho^2}$, wie vorher. Wird das Potential in B gleich Null gesetzt, so ist es in A gleich $\frac{Ed}{\varrho^2} = 4\pi\delta d$ zu setzen.

Dasselbe Resultat ergiebt sich auch auf anderem Wege. Die Kraftlinien sind bei der Kugel Radien, bei der Ebene also Lote auf der Ebene. Die Kraftröhren sind also prismatisch, zweckmäfsig nimmt man sie als quadratische Prismen an. Die Strömung der inkompressiblen Flüssigkeit hat in ihnen konstante Geschwindigkeit, denn $vF = v_1F_1$ giebt $v = v_1$ für $F = F_1$. Demnach ist auch $p = p_1$, d. h. die Anziehung einer homogenen Ebene ist konstant, das Arbeitsdiagramm also ist ein Rechteck, sein Inhalt nimmt auf gleichen Strecken um denselben Betrag zu, bezw. ab, folglich ist das Potentialdiagramm durch eine schräge Gerade begrenzt.

In Fig. 52 sind I und II die beiden als unbegrenzt zu denkenden parallelen Ebenen. Aufserhalb beider heben sich die Wirkungen auf, weil $\delta_1 = -\delta$ ist. Ist $AK = 4\pi\delta$, so ist $ABLK$ das Arbeitsdiagramm für die Bewegung der elektrischen Einheit von I bis II. Diese Einheit wird von der Ebene I ebenso stark abgestofsen, wie von der anderen angezogen, folglich kommt auf jede Ebene die Hälfte der Arbeit. Durch $K_1 L_1$ ist diese Teilung herbeigeführt. Folglich ist $2\pi\delta$ der Kraftanteil jeder der beiden Ebenen. (Ist $\delta = 1$, so ist die Anziehung gleich 2π, was schon in Nr. 27 angedeutet wurde und später noch auf anderem Wege bewiesen werden soll.) Ist $D_2 D = 4\pi\delta d$, so ist $D_2 ED$ das Potentialdiagramm.

Fig. 52.

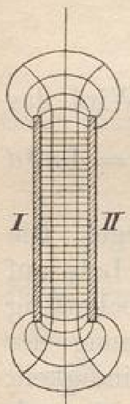


[Bei der Symmetrie des Problems darf man den Potentialwert auch in der Mitte zwischen den Ebenen als Null annehmen, so dafs die Ebenen auf Potentialwerte $\pm 2\pi\delta d$ gelangen.]

Diese Betrachtungen finden praktische Anwendung bei der angenäherten Theorie des Kondensators von Kohlrausch.

75) Kohlrauschs Kondensator. Hat man zwei gleiche Kreisscheiben von geringem Abstande d und grofsem Durchmesser R einander parallel gegenüber gestellt, so erhält man mit beliebig grofser Annäherung zwischen beiden denselben Vorgang, wie zwischen den unbegrenzten Ebenen, sobald die eine mit $+E$ geladen ist und die andere unter Ableitung der Influenzelektrizität $-E$ erhalten hat. Die Kraftlinien im Innern sind parallele Gerade, nur an den Rändern krümmen sie sich nach aufsen. Dort sind sie entsprechend fortzusetzen. Die Niveaulinien aber sind im Innern den Platten parallel und beginnen ebenfalls erst beim Austritt sich zu krümmen, um aufsen nach Art von elliptischen Bogen in sich zurückzuwandern. Abgesehen vom Rande also stimmt im Innern alles mit dem vorigen Falle überein, auch wird das Potentialdiagramm wieder ein Dreieck $D_2 ED$ und das Arbeitsdiagramm ein Rechteck $ABLK$.

Fig. 53.



Man kann sich das Laden von I, die Scheidung in II und die Entfernung der Influenzelektrizität 2^ter^ Art aus II dadurch ersetzt denken, dafs man die positive Elektrizität aus II direkt nach I schafft. Dies erfordert, wenn die freie Elektrizität in I bereits die Dichte δ hat, nach dem Arbeitsviereck $ABLK$ die Arbeit $4\pi\delta d$. Im Anfang, wo $\delta = o$ war, war die erforderliche Arbeit 0. Im Mittel ist sie $2\pi\delta d$

für die Einheit, also $2\pi\delta dE$ für die Ladung E. Da $2\pi\delta d = \frac{V_1 - V_2}{2}$ ist, kann man daher auch schreiben $(V_1 - V_2)\frac{E}{2}$. Für die unbegrenzte Ebene ist, um die Dichte gleich δ zu machen, eine Zufuhr von unendlich vieler Elektrizität nötig, ist dagegen F der Flächeninhalt jeder der beiden endlichen Platten, so ist $E = \delta F$. Die gesamte Arbeit oder Energie ist also $2\pi d\delta E$ oder $2\pi d\frac{E^2}{F}$.

Hätte es sich aber um die Entfernung d_1 gehandelt, so würde die Energie gleich $2\pi d_1 \frac{E^2}{F}$ sein. Der Unterschied

$$A = 2\pi\frac{E^2}{F}(d_1 - d)$$

kann aber auch anders gedeutet werden. Ladet man bei Entfernung d und entfernt man dann die Ebenen so weit voneinander, dafs der Abstand d_1 ist, so ist das Schlufsresultat dasselbe, als ob man beim Abstande d_1 ladet. Folglich ist A die Arbeit, die nötig ist, die beiden Ebenen aus dem gegenseitigen Abstande d in den gegenseitigen Abstand d_1 zu versetzen. Ist nun p der nach obigem konstante Widerstand gegen diese Bewegung, so ist jene Arbeit auch als

$$A = p(d_1 - d)$$

zu schreiben. Der Vergleich giebt

$$p = 2\pi\frac{E^2}{F}.$$

Die gegenseitige Anziehung der beiden Kondensatortafeln ist also proportional dem Quadrate der Ladung und umgekehrt proportional der Fläche.

Die Messung von p kann experimentell erfolgen. Daraus folgt dann für die Gröfse der Ladung

$$E = \sqrt{\frac{pF}{2\pi}}.$$

Als Dichte ergiebt sich

$$\delta = \frac{E}{F} = \sqrt{\frac{p}{2\pi F}}.$$

Wird dies in die Potentialgleichung $V_1 - V_2 = 4\pi\delta d$ eingesetzt, so ergiebt sich die Möglichkeit, die Potentialdifferenz mittels der Gleichung

$$V_1 - V_2 = 4\pi d\sqrt{\frac{p}{2\pi F}} = d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}$$

zu bestimmen.

Man pflegt aber das Potential V_2 der einen Platte durch Ableitung auf Null zu bringen, die Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$V_1 = d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}.$$

Die Kapazität, d. h. die für die Potentialeinheit nötige Ladung ist also

$$K = \frac{E}{V_1} = \frac{\sqrt{\frac{pF}{2\pi}}}{d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}} = \frac{1}{d}\cdot\frac{F}{4\pi},$$

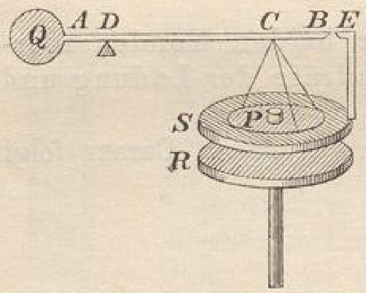
oder, wenn man $F = \varrho^2\pi$ setzt,

$$K = \frac{\varrho^2}{4d}.$$

Die Kapazität des Kondensators ist also proportional dem Quadrate des Plattenradius und umgekehrt proportional dem Abstande d der Platten. — Dies ist die übliche Darstellung der angenäherten Theorie des Kondensators von Kohlrausch, die auch im folgenden Anwendung findet. Später wird sie entsprechende Verfeinerung erhalten.

76) Schutzringelektrometer von W. Thomson. Die Beschreibung des Apparates findet man in den besseren Lehrbüchern. Rein schematisch handelt es sich um folgendes. Ein Hebel AB ist drehbar um D und trägt bei C eine Platte P, auf der ein loses Gewicht p ruht und bei A ein Gegengewicht Q. Das erstere Gewicht ist so gewählt, dafs Gleichgewicht herrscht. Nimmt man es ab, so wird die Platte emporgehoben. Sie kann aber dadurch wieder herabgezogen werden, dafs man sie und eine darunterliegende Platte R, die fest auf isolierendem Träger T ruht, in oben besprochener Weise als Kondensatoren elektrisch macht, so dafs Anziehung stattfindet. Die Platte P kann durch einen festen Schutzring S passieren, mit dem sie stets leitend durch einen beweglichen Draht verbunden ist. Dieser Ring hat nur den Zweck, die oben besprochene Randstörung zu übernehmen, so dafs die bewegliche Platte P als homogen mit Elektrizität belegt gelten kann. Gleichgewicht herrscht, wenn B und E genau koinzidieren (was mittels Lupe und Haar auf das genaueste kontroliert werden kann). Dabei fallen die Ebenen von P und S zusammen. Wird diese Lage durch

Fig. 54.



die Anziehung der Elektrizitäten noch nicht erreicht, so kann die Platte R mittels Mikrometerschraube so hoch emporbewegt werden, dafs die Anziehung stark genug wird, jene Absicht zu erreichen. Soll nun die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ zweier Leiter untersucht werden, so verbindet man sie leitend mit den Platten und stellt mittels der Mikrometerschraube das Gleichgewicht her. Jetzt ist nach obigem die zwischen den Scheiben bestehende Potentialdifferenz

$$V_1 - V_2 = d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}.$$

Der Schutzring würde unwirksam sein, wenn er nicht mit der Innenplatte leitend verbunden wäre. Zwischen beiden ist allerdings ein kleiner Zwischenraum, aber man braucht nur einige der Kraft- und Niveaulinien des Hauptschnittes zu skizzieren, um zu sehen, dafs das Ausbuchten der Kraftlinien und das Auseinandergehen der Niveaulinien für die Innenplatte so zu sagen vollständig verhindert wird und erst am Rande des Ringes stattfindet. Darüber soll erst später gesprochen werden.

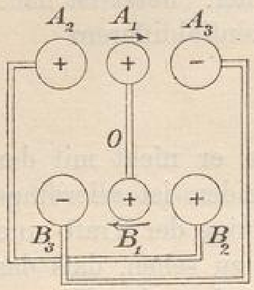
Der Ring dient zugleich als Grundfläche für eine leitende Metallkapsel, die den Apparat umgiebt und nach der Erde abgeleitet den Mechanismus ringsum mit dem Potentiale $V_2 = 0$ umgiebt, wobei die Gleichung in $V_1 = d\sqrt{\frac{8\pi p}{F}}$ übergeht. So ist der Mechanismus vor jeder störenden Influenzwirkung von aufsenher geschützt. Eine kleine Öffnung für das Anbringen der Beobachtungslupe ist von geringer störender Einwirkung.

Die obige, in den Lehrbüchern übliche Theorie bedarf noch einer Korrektur, da die bewegliche Platte nicht den richtigen Durchmesser hat. Da es sich nur um einen konstanten Faktor handelt, soll die von Maxwell und Kirchhoff gegebene Rechnung hier unterlassen werden. Es handelt sich nur darum, ein praktisches Beispiel und das Prinzip eines wichtigen Apparates zu geben. Seine genauere Beschreibung und die Verwendungsweise findet man in den Lehrbüchern. Oben wurde gezeigt, wie jeder Kondensator durch seine grofse Kapazität gestattet, weit gröfsere Mengen schwach gespannter Elektrizität aufzunehmen, als eine einfache Platte mit ihrer geringen Kapazität. Seine Aufnahmefähigkeit dauert fort, bis die Potentialdifferenz aufgehoben ist. Die einfache Platte würde in den Fällen, um die es sich hier handelt, zu geringe Mengen aufnehmen, als dafs Messungen möglich sein könnten.

77) Thomsons Quadrantenelektrometer. Die Beschreibung dieses sehr empfindlichen Apparates sehe man ebenfalls in den Lehrbüchern nach. Grundprinzip und Rechnungsmethode seien kurz klar

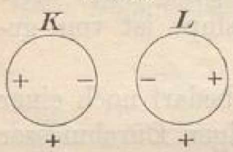
gelegt. Fig. 55 stellt im Grundrisse vier mit positiver bezw. negativer Elektrizität geladene Leiter vor, die man vorläufig als Kugeln betrachten möge. In der Mitte befindet sich ein Aluminiumplatte, die bifilar aufgehängt ist, so dafs sie aus jeder Lage mit einem gewissen Drehungsmomente, welches theoretisch oder experimentell bestimmt werden kann, in die normale Lage zurückgetrieben wird. Erhält diese Platte eine geringe elektrische Ladung, z. B. eine positive, so tritt Drehung im angedeuteten Sinne ein, bis das Bifilarmoment grofs genug geworden ist, um Gleichgewicht zu geben. A_2 und B_2 sind verbunden, um gleiches Potential V_2 zu zeigen, ebenso A_3 und B_3, die $-V_3$ geben mögen, während die Platte das Potential V_1 habe.

Fig. 55.



Zur vorläufigen Berechnung ist folgendes zu sagen. Eine kleine Kugel K Fig. 56 habe an der Oberfläche das Potential $V = \frac{E_1}{\varrho_1}$. Nähert sich eine andere mit dem Potentiale $V = \frac{E_2}{\varrho_2}$, so tritt beiderseitige Influenz ein, die wegen des Additionsgesetzes der Potentiale auf jeder Kugel so stattfindet, als ob sie unelektrisch wäre. Sind z. B. beide positiv geladen, so geben die ursprünglichen Ladungen eine gegenseitige Abstofsung proportional dem Produkte der Ladungen, also auch proportional dem Produkte der Potentiale, so dafs es sich um einen Ausdruck $+ c V_1 V_2$ handelt. Die von K auf L hervorgerufene Influenzwirkung giebt eine negative Elektrizitätsmenge F, die proportional E, also auch proportional V_1 ist, z. B. gleich $k V_1$. Ladung E und F geben eine Anziehung proportional $E \cdot F$, also auch proportional $V_1 \cdot k V_1$, d. h. proportional V_1^2, sie sei gleich $- c_1 V_1^2$. Ebenso giebt die von L ausgeübte Influenz eine Anziehung $- c_2 \cdot V_2^2$. [Man kann ebenso die Influenzelektrizitäten 2ter Art in Rechnung ziehen, was aber nicht geschehen soll, weil bei gröfserer Annäherung der Kugeln ihre Wirkungen sehr gegen die anderen zurücktreten, überhaupt sollen nur die drei besprochenen Posten berücksichtigt werden.] Die Gesamtwirkung ist dann

Fig. 56.



$$- c_1 V_1^2 - c_2 V_2^2 + c V_1 V_2.$$

Auch bei Einrechnung der vernachlässigten Posten ergeben sich drei Glieder von dieser Form.

Nähert man jetzt dem beweglich gedachten ersten Körper noch einen dritten vom Potentiale V_3 und bringt man diesen so an, dafs seine Wirkung auf den ersten entgegengesetzt der vom zweiten ausgeübten ist, so handelt es sich unter gleichartigen Verhältnissen um eine Wirkung

$$-\left[-c_1 V_1^2 - c_2 V_3^2 + c V_1 V_3\right].$$

Die Gesamtwirkung ist

$$c_1\left(V_1^2 - V_1^2\right) + c_2\left(V_3^2 - V_2^2\right) - c V_1\left(V_3 - V_2\right),$$

oder, da der erste Posten wegfällt, der zweite aber als

$$c_2(V_3 + V_2)(V_3 - V_2)\cdot\frac{V_1}{V_1}\cdot\frac{c}{c}$$

geschrieben werden kann, gleich

$$c V_1 (V_2 - V_3)\left[1 - \frac{c_2}{c}\cdot\frac{V_2 + V_3}{V_1}\right].$$

Ist nun V_1 sehr grofs gegen $V_2 + V_3$, so bleibt nur der Ausdruck

$$c V_1 (V_2 - V_3)$$

zu berücksichtigen. Ist übrigens $V_3 = - V_2$, so geht letzteres über in

$$2 c V_1 \cdot V_2.$$

Eine solche Kraft ist es, die bei dem Quadrantenelektrometer auf die Aluminiumplatte wirkt und ihr ein Drehungsmoment giebt, dessen Gröfse proportional $V_1 V_2$ ist und mit $\gamma V_1 V_2$ bezeichnet werden möge. Beim Gleichgewichte ist dieses gleich dem bekannten Bifilarmomente M. Ist also V_2 und ebenso γ bekannt, so bestimmt sich V_1 aus

$$V_1 = \frac{M}{\gamma V_2}.$$

Die Lehrbücher beschreiben noch andere elektrostatische Mefsapparate, z. B. das bekannte Sinuselektrometer von Kohlrausch. Das Gegebene wird hinreichen, einen Begriff davon zu geben, wie man auch geringere Potentialdifferenzen messen und nach Nr. 66 aus Kapazität und Potential auf die Elektrizitätsmengen schliefsen kann. Die über die Apparate vorgetragenen Theorien sind dem bisherigen elementaren Standpunkte angepafst worden und können nur als erste Annäherungen betrachtet werden. Die folgenden Kapitel werden feinere Untersuchungen ermöglichen, ohne dafs der elementare Standpunkt verlassen wird.
