Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

54) Das Ohmsche Gesetz

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Bei einem längeren Wege handelte es sich früher um die Summe von Arbeiten, d. h. um Σpw, hier um die Summe der Produkte aus den kleinen Verschiebungen und den zugehörigen Geschwindigkeiten, also um Σvw.

Eine solche Flüssigkeit ist allerdings nur eine gedachte, ideale. Ihre Eigenschaften können erst später, bei den allgemeinen Problemen, dargestellt werden. Aber die Einführung des Begriffes Geschwindigkeitspotential gestattet eine kurze Ausdrucksweise, ohne dabei über die Natur des betreffenden Fluidums (Wärme, Elektrizität) irgend welche hypothetischen Voraussetzungen zu beanspruchen. Helmholtz bezeichnet die Kraftröhre als Stromfaden, jede ihn begrenzende Kraftlinie als Stromlinie.

Helmholtz hätte ebenso gut eine elastische Flüssigkeit von konstanter Geschwindigkeit und veränderlicher Dichte betrachten können, die nach den entsprechenden Gesetzen in den Kraftröhren fließt. Soll eine solche Strömung stationär sein, so müssen die Dichtigkeiten δ sich umgekehrt wie die Querschnitte verhalten, also

$$\delta_1 : \delta_2 = F_2 : F_1 = r_2^2 : r_1^2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2},$$

und

$$\delta = kG = k\frac{V_2 - V_1}{w} = km\frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{r_1 - r_2}.$$

Jetzt würde ($k = 1$ gesetzt)

$$V_2 - V_1 = \delta w$$

sein, d. h. die Potentialdifferenz gleich dem Produkte aus der kleinen Verschiebung und der zugehörigen (mittleren) Dichte. Das Potential wäre analog als Dichtigkeitspotential zu bezeichnen.

Nimmt man in irgend einem Material konstante Geschwindigkeit eines elektrischen Fluidums an, so entspricht die obige Annahme ganz ebenso dem Ohmschen Gesetze für die elektrische Strömung in einem Drahte von veränderlichem Querschnitte F, wie die des Helmholtzschen Fluidums.

54) Das Ohmsche Gesetz.

In homogenen Drähten von überall gleichem Querschnitte handelt es sich für gleiche Abstände um gleiche Potentialdifferenzen. Die Potentialdifferenz längs einer Strecke ist nämlich die mechanische Arbeit, die der stationäre Strom nötig hat, um die Elektrizitätsmenge 1 durch die Widerstände, welche diese Strecke bietet, hindurchzuführen. Ist die Potentialdifferenz gleich 1, die Länge gleich 1 und der Querschnitt gleich 1, so dauert es, je nach dem Material des Drahtes, eine gewisse Zeit ϱ, bis die Einheit der Elektrizitätsmenge einen der Querschnitte passiert hat. Je gröfser diese Zeit ist, um so gröfser ist der Widerstand des Materials an sich, um so geringer seine Leitungsfähigkeit. Daher heifst ϱ der spezifische Widerstand, d. h. der auf die obigen Einheiten reduzierte Widerstand. In der Sekunde geht dann durch den Querschnitt die elektrische Menge $\frac{1}{\varrho} = \lambda$, und diese Gröfse heifst das spezifische Leitungsvermögen des Materials.

Ist nun die Fläche des Querschnitts F mal so grofs, so geht die Ffache Menge von Elektrizität hindurch, ist die Länge l mal so grofs, der Widerstand also der $l$fache, so geht der $l$te Teil hindurch, ist die Potentialdifferenz nicht 1, sondern $(V_2 - V_1)$, so geht das $(V_2 - V_1)$fache hindurch. Für einen Draht von Länge l und Querschnitt F ist also bei gegebener Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ die jeden Querschnitt sekundlich passierende Elektrizitätsmenge

$$I = \frac{\lambda}{l} F(V_2 - V_1) = \lambda F G,$$

also ist

$$V_2 - V_1 = I \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{l}{F} = I \cdot \varrho \frac{l}{F} = I \cdot W,$$

wo W den wirklichen Widerstand des Drahtes bedeuten soll.

Dies ist der Ausdruck für das Ohmsche Gesetz. Man bezeichnet I als die Stromstärke (Intensität der Strömung), G ist wieder das Potentialgefälle.

Ist v die Geschwindigkeit, F der Querschnitt, δ die Dichte, d. h. die mittlere Elektrizitätsmenge auf der Raumeinheit, so ist die Stromstärke zugleich

$$I = \delta v F.$$

Durch Gleichsetzung erhält man als Formel für die Stromdichte

$$\delta = \frac{\lambda}{v} \frac{V_2 - V_1}{l} = \frac{\lambda}{v} G = kG,$$

wo k eine konstante Gröfse ist.

Handelt es sich nun um eine fingierte elektrische Strömung in einem den Raum homogen erfüllenden Mittel, die von dem Punkte O aus nach allen Seiten dem unendlichen Bereiche zuströmt, so wird man den Forderungen des Ohmschen Gesetzes gerecht, wenn man sich in O einen Pol von irgend welcher Polstärke m denkt, der die elektrische positive Einheit mit der Kraft $\frac{m}{r^2}$ abstöfst (die entgegengesetzte anzieht), so dafs $\frac{m}{r}$ das Potential und $\frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1}$ die Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ ist. Jetzt würde die Stromdichte sein

$$\delta = k_1 m \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{r_2 - r_1} = k_1 G.$$

[Ist r unendlich grofs, so giebt eine endliche Verschiebung e die Anziehungsdifferenz

$$\frac{m}{(r+e)^2} - \frac{m}{r^2} = \frac{m}{r^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{e}{r}\right)^2} - 1\right],$$

was gleich Null ist, sobald $\frac{e}{r}$ unendlich klein wird. Ist aber die Anziehung überall dieselbe, so ist das Arbeitsdiagramm ein Rechteck, gleichen Strecken also entsprechen gleiche Potentialdifferenzen, und dies entspricht dem Ohmschen Gesetze, d. h. die Bewegung im Drahte überall gleichen Querschnitts ist ein besonderer Fall der obigen Strömung, nur ist der Draht unendlich lang zu denken].

Beiläufig sei bemerkt, dafs nach obiger Definition die Potentialdifferenz in einem Drahte von Länge l die auf die elektrische Menge 1 reduzierte Stromarbeit (Überwinden von Widerständen) war, dafs also

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Stromarbeit}}{\text{Elektrizitätsmenge}}.$$

Daraus folgt

$$\text{Potentialdifferenz} = \frac{\text{Stromarbeit pro Sekunde}}{\text{Elektrizitätsmenge pro Sekunde}} = \frac{L}{I}.$$

Nach obigem aber war zugleich

$$V_2 - V_1 = I \cdot \left(\varrho \frac{l}{F}\right) = IW$$

d. h. Potentialdifferenz gleich Stromstärke mal wirklicher Widerstand, d. h. z. B. Anzahl der Volt gleich Anzahl der Ampère mal Anzahl der Ohm. Daraus folgt $IW = \frac{L}{I}$ oder $L = WI^2$. Näheres darüber ist im Anhange gezeigt, wo es sich um die elektrischen Einheiten handelt.

55) Ähnlich ist es mit den stationären Strömen der Wärme, nur treten hier an Stelle der Potentialdifferenzen Temperaturunterschiede, an Stelle der hypothetischen Elektrizitätsmengen Wärmemengen. Weil in jede Zelle ebensoviel Wärme einströmt, wie aus ihr ausströmt, so bleibt die Temperatur an jeder Stelle konstant. An Stelle der durch den Querschnitt strömenden Elektrizitätsmenge $I = \lambda F \frac{V_2 - V_1}{l} = \lambda F G$ tritt jetzt die hypothetische Wärmemenge $I = kF \frac{T_2 - T_1}{l} = kFG$. Darauf soll jetzt nicht näher eingegangen werden. Die Betrachtungen würden fast wörtlich dieselben sein.