# Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

**Holzmüller, Gustav**

**Leipzig, 1898**

64) Fall der Ableitung der inneren Kugel

da $p = 4\pi\delta$ ist, den Druck $2\pi\delta^2$, der wieder als Oberflächenspannung bezeichnet wird. Ist die Kugel massiv, so gilt von einer auf sie gebrachten elektrischen Ladung dasselbe.

63) Centrische Influenz auf die isolierte Hohlkugel. Der in $M$ liegende Konduktor sei mit $+E$ geladen, die Influenz tritt auf der nicht abgeleiteten Hohlkugel ein und schafft $-E_1$ an die Innenfläche, ebenso viel $+E_2$ an die Aufsenfläche. Die Dichte wird auf jeder Fläche überall gleichmäfsig, aufsen natürlich kleiner als innen, dabei übt $+E_2$ nach innen die Wirkung Null aus (Kugelschale), $+E$ und $-E_1$ üben, da Gleichgewicht herrscht, auf die Punkte des Metalls aufserhalb der inneren Belegung beim Ruhezustande auch die Wirkung Null aus, und da diese Wirkung gleich $\frac{E}{r^2} - \frac{E_1}{r^2}$ ist, so mufs $+E = +E_1$ und nun ebenso $+E = +E_2$ sein. Folglich:

Aufserhalb der Hohlkugel ist das Potential gleich

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} + \frac{E_2}{r} = \frac{E}{r},$$

also so grofs, als ob nur die innerste, oder nur die äufserste der drei Elektrizitäten da wäre.

Im Metall der Hohlkugel ist das Potential

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} + \frac{E}{\varrho_2} = \frac{E}{\varrho_2}.$$

Zwischen Konduktor und Hohlkugel ist das Potential gleich

$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{\varrho_1} + \frac{E}{\varrho_2} = E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right);$$

im Innern des Konduktors ist es gleich

$$\frac{E}{\varrho} - \frac{E_1}{\varrho_1} + \frac{E}{\varrho_2} = E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Die Radien sind der Gröfse nach gleich $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$ gesetzt.

Bringt man den Konduktor in excentrische Lage, so wirken $+E$ und $-E_1$ auf das Metall der Hohlkugel wieder mit der Kraft Null, die äufsere Elektrizität $+E_1$ ordnet sich also so an, als ob die beiden andern nicht da wären. Dieser Fall kommt noch genauer zur Sprache, da er auf die interessante Theorie der centrobarischen Körper führt.

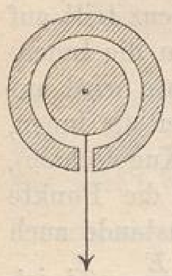
Leitet man die Schale ab, so ist das Potential innerhalb des Kernes gleich

$$E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1}.$$

64) Die innere Kugel sei nach der Erde abgeleitet. Die Radien seien der Reihe nach $\varrho$, $\varrho_1$ und $\varrho_2$, die Ladung der Aufsen-

schale sei $+E$. Durch die Verbindung mit der Erde herrsche im Innern des Kerns das Potential Null. Die Ladung $+E$ sammelt sich an der Innenwand der Schale, die Influenzelektrizität $-E_1$ an der Auſsenwand des Kerns an. Da aber im Innern des letzteren $\frac{E}{\varrho_1} - \frac{E_1}{\varrho} = 0$ sein muſs, ist jetzt $E_1 = \frac{\varrho}{\varrho_1} E$. Die Influenzelektrizität ist also von geringerer Menge, als die Ladungselektrizität, und zwar ist das Verhältnis der Radien maſsgebend. Für äuſsere Punkte wird das Potential gleich

Fig. 48.



$$\frac{E}{r} - \frac{E_1}{r} = \frac{E}{r} - \frac{\varrho}{\varrho_1} E \cdot \frac{1}{r} = \frac{E}{r} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}.$$

Bei den besprochenen Influenzproblemen enthält das Dielektrikum nur da Kraftröhren, wo das Potential veränderlich ist. Stimmen $+E$ und $-E_1$ in der Menge überein, und ist $E_2$ abgeleitet, so befinden sich sämtliche Kraftröhren zwischen den beiden Leitern. Sind wie im letzten Falle die Mengen verschieden, so geht der von der gröſseren Menge herrührende Überschuſs von Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche. Entsprechendes findet bei den später zu behandelnden Mehrpunktproblemen statt. An den beiden Enden jeder Kraftlinie sind also stets gleiche Mengen von Elektrizität aufgespeichert.

65) **Aufgabe.** Für den Fall koncentrischer Kugelschalen, von denen die eine abgeleitet ist, soll die potentielle Energie der Ladung berechnet werden.

a) Die Schale sei leitend mit der Erde verbunden, der Kern mit $E$ geladen, so daſs $E_1 = E$ ist.

Um die Einheit positiver Elektrizität aus unendlicher Entfernung nach dem Kern zu bringen, braucht man, nachdem er mit $E$ geladen ist, bis an die Innenbelegung $-E_1$ der Schale die Arbeit Null. Von dort bis zum Rande des Kernes steigt der Potentialwert auf $\frac{E}{\varrho} - \frac{E_1}{\varrho_1} = E\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1}$. Im Anfang war dazu nur die Arbeit Null nötig. Da die Arbeit proportional $E$ ist, ist der Mittelwert für die nötige Arbeit gleich $E\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho\varrho_1}$. Um jedoch nicht die Einheit, sondern die Ladung $+E$ nach dem Kern zu schaffen, ist die $E$fache Arbeit nötig, die geleistete Arbeit ist also

$$\text{Energie} = E^2\frac{\varrho_1 - \varrho}{2\varrho\varrho_1}.$$

Sie ist proportional dem Quadrate der Ladung und dem Quotienten aus der Differenz und dem Produkte der inneren Radien. Das Potential innerhalb des Kerns war nach Nr. 63