Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

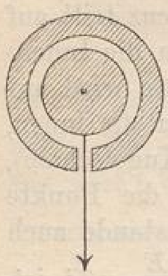
Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

65) Potentielle Energie für den Fall koncentrischer Kugelschalen, von denen die eine abgeleitet ist

schale sei $+E$. Durch die Verbindung mit der Erde herrsche im Innern des Kerns das Potential Null. Die Ladung $+E$ sammelt sich an der Innenwand der Schale, die Influenzelektrizität $-E_1$ an der Aufsenwand des Kerns an. Da aber im Innern des letzteren $\frac{E}{\varrho_1}-\frac{E_1}{\varrho}=0$ sein mufs, ist jetzt $E_1=\frac{\varrho}{\varrho_1}E$. Die Influenzelektrizität ist also von geringerer Menge, als die Ladungselektrizität, und zwar ist das Verhältnis der Radien mafsgebend. Für äufsere Punkte wird das Potential gleich

Fig. 48.



$$\frac{E}{r}-\frac{E_1}{r}=\frac{E}{r}-\frac{\varrho}{\varrho_1}E\cdot\frac{1}{r}=\frac{E}{r}\cdot\frac{\varrho_1-\varrho}{\varrho_1}.$$

Bei den besprochenen Influenzproblemen enthält das Dielektrikum nur da Kraftröhren, wo das Potential veränderlich ist. Stimmen $+E$ und $-E_1$ in der Menge überein, und ist E_2 abgeleitet, so befinden sich sämtliche Kraftröhren zwischen den beiden Leitern. Sind wie im letzten Falle die Mengen verschieden, so geht der von der gröfseren Menge herrührende Überschufs von Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche. Entsprechendes findet bei den später zu behandelnden Mehrpunktproblemen statt. An den beiden Enden jeder Kraftlinie sind also stets gleiche Mengen von Elektrizität aufgespeichert.

65) **Aufgabe.** Für den Fall koncentrischer Kugelschalen, von denen die eine abgeleitet ist, soll die potentielle Energie der Ladung berechnet werden.

a) Die Schale sei leitend mit der Erde verbunden, der Kern mit E geladen, so dafs $E_1=E$ ist.

Um die Einheit positiver Elektrizität aus unendlicher Entfernung nach dem Kern zu bringen, braucht man, nachdem er mit E geladen ist, bis an die Innenbelegung $-E_1$ der Schale die Arbeit Null. Von dort bis zum Rande des Kernes steigt der Potentialwert auf $\frac{E}{\varrho}-\frac{E_1}{\varrho_1}=E\frac{\varrho_1-\varrho}{\varrho\varrho_1}$. Im Anfang war dazu nur die Arbeit Null nötig. Da die Arbeit proportional E ist, ist der Mittelwert für die nötige Arbeit gleich $E\frac{\varrho_1-\varrho}{2\varrho\varrho_1}$. Um jedoch nicht die Einheit, sondern die Ladung $+E$ nach dem Kern zu schaffen, ist die Efache Arbeit nötig, die geleistete Arbeit ist also

$$\text{Energie}=E^2\frac{\varrho_1-\varrho}{2\varrho\varrho_1}.$$

Sie ist proportional dem Quadrate der Ladung und dem Quotienten aus der Differenz und dem Produkte der inneren Radien. Das Potential innerhalb des Kerns war nach Nr. 63

$$V = E \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho \varrho_1},$$

also ist

$$E = V \frac{\varrho \varrho_1}{\varrho_1 - \varrho}$$

und daher

$$\text{Energie} = E^2 \frac{\varrho_1 - \varrho}{2 \varrho \varrho_1} = V^2 \frac{\varrho^2 \varrho_1^2}{(\varrho_1 - \varrho)^2} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho}{2 \varrho \varrho_1} = V^2 \frac{\varrho \varrho_1}{2(\varrho_1 - \varrho)}.$$

Demnach ist die aufgespeicherte Energie auch proportional dem Quadrate des Potentials im Innern des Kerns.

b) Der Kern sei leitend mit der Erde verbunden. In diesem Falle ist das Potential auf der Kugelschale gleich $\frac{E}{\varrho_2} \cdot \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1}$, also, wenn sie sehr dünn ist, gleich $E \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho_1^2}$. Daraus folgt als Energie ähnlich, wie vorher, durch Multiplikation des halben Endwertes mit E,

$$E^2 \frac{\varrho_1 - \varrho}{2 \varrho_1^2} \quad \text{oder} \quad V^2 \frac{\varrho_1^2}{2(\varrho_1 - \varrho)}.$$

66) Begriff der Kapazität. Den Quotienten aus Ladung und Potential eines Leiters bezeichnet man als seine Kapazität, also $K = \frac{E}{V}$. Nun ist aber E dividiert durch V die auf die Einheit des Potentials reduzierte Ladung. Folglich:

Unter Kapazität eines Leiters versteht man diejenige elektrische Ladung, die nötig ist, um sein Potential um 1 zu erhöhen, also z. B. von 0 auf 1 zu bringen.

(Die Definition gilt vorläufig nur von der Kugelgestalt, denn für allgemeinere Gestalten mufs erst nachgewiesen werden, dafs das Potential proportional der Ladung, also die Kapazität bei fortgesetzter Ladung dieselbe ist. Bei der Kugel ist es der Fall.)

Für die allein im Raume befindlichen Leiter von der Gestalt einer Kugel oder Kugelschale ist

$$K = \frac{E}{\left(\frac{E}{\varrho}\right)} = \varrho,$$

sie ist also gleich dem Radius der Kugel oder Kugelschale, möge das Material des Leiters sein, welches es wolle.

Ist die Ladung $= 1$ (z. B. in Coulomb), das Pontential $= 1$ (z. B. in Volt), so ist die Kapazität $= 1$ (im Beispiel gleich ein Farad), zugleich bei der Kugel der Radius $= 1$ cm. Über diese Einheiten vergl. Anhang.