Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

71) Batterie Leydener Flaschen bei Säulenschaltung

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{V^2 r^2 \varrho^2}{d^2} \cdot \frac{d}{\varrho r} = \frac{n}{2} \frac{V^2 r \varrho}{d}.$$

Die Energie der Ladung ist also proportional dem Quadrate der Ladung oder auch dem Quadrate des Potentials.

Sie ist aber auch abhängig von $r\varrho$ und d. Ist d sehr klein gegen r und ϱ, so kann man $r\varrho = r(r + d) = r^2 + rd$ gleich r^2 setzen $\left[r\varrho = r^2\left(1 + \frac{d}{r}\right) = r^2 \text{ für } \frac{d}{r} = o\right]$. Dann ist die Energie gleich

$$n E^2 \frac{d}{2r^2} = \frac{2nE^2 d\pi}{4r^2\pi} = \frac{2nE^2 d\pi}{O}$$

$$\text{bezw. } \frac{nV^2 r^2}{2d} = \frac{4nV^2 r^2 \pi}{8\pi d} = \frac{nV^2 O}{8\pi d},$$

wo O die Oberfläche ist. Stimmen demnach in zwei Fällen die Ladungen überein, so ist die Energie proportional der Glasdicke d und umgekehrt proportional der Fläche der inneren Kugelschalen. Ist dagegen das Potential in zwei Fällen dasselbe, so ist die Energie proportional der Oberfläche nO und umgekehrt proportional der Glasdicke.

Die Kapazität ist gleich

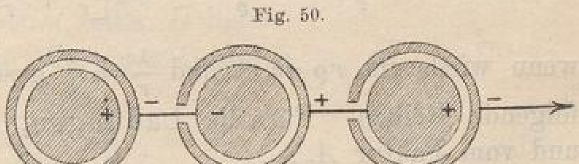
$$\frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}} = \frac{nE}{\left(\frac{Ed}{r\varrho}\right)} = \frac{nr\varrho}{d},$$

also das $n$fache der Kapazität einer einzelnen Flasche.

71) Batterie Leydener Flaschen, nacheinander geschaltet. (Franklinsche oder Kaskaden-Batterie.)

Alle inneren Radien seien gleich r, alle äufseren gleich ϱ, die Innenladungen seien $J_1, J_2, J_3 \ldots$, alle äufseren $-A_1, -A_2, -A_3, \ldots$, die Innenpotentiale $V_1, V_2, V_3, \ldots$, die Aufsenpotentiale $U_1, U_2, U_3, \ldots$ Jede Schale sei mit dem benachbarten Kern, die eine Schale mit der Erde verbunden. Die Glasdicke sei wieder d. Die nach Ladung der ersten Kugel mit J_1 sich bildenden Influenzelektrizitäten sind, da bei der Scheidung jedesmal gleiche Mengen sich trennen, paarweise gleich, also $-A_1 = -J_2$, $-A_2 = -J_3, \ldots, -A_{n-1} = -J_n$. Der Verbindungen wegen sind ebenso je zwei Potentiale einander gleich. $U_1 = V_2$, $U_2 = V_3$, $\ldots, U_{n-1} = V_n$, nur das letzte U_n ist gleich Null, weil die Schale

Fig. 50.



mit der Erde verbunden ist. Von dort werde angefangen. Zunächst ist absolut genommen $A_{n-1} = J_n = A_n$, und $U_n = 0$. Dagegen

$$V_n = \frac{J_n}{r} - \frac{A_n}{\varrho} = A_n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) = A_n \frac{\varrho - r}{r\varrho} = A_n \frac{d}{r\varrho}.$$

Ebenso grofs ist U_{n-1}. Aus

$$U_{n-1} = \frac{J_{n-1}}{\varrho} - \frac{A_{n-1}}{\varrho}$$

folgt

$$J_{n-1} = \varrho\, U_{n-1} + A_{n-1} = \varrho A_n \frac{d}{r\varrho} + A_n = A_n\left(1 + \frac{d}{r}\right).$$

Ebenso grofs ist absolut genommen A_{n-2}. Es folgt

$$V_{n-1} = \frac{J_{n-1}}{r} - \frac{A_{n-1}}{\varrho} = \frac{A_n}{r}\left(1 + \frac{d}{r}\right) - \frac{A_n}{\varrho} = A_n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} + \frac{d}{r^2}\right)$$

$$= A_n\left(\frac{d}{r\varrho} + \frac{d}{r^2}\right),$$

also wenn man angenähert $r\varrho = r^2$ setzt,

$$V_{n-1} = 2\, A_n \frac{d}{r^2}.$$

Ebenso grofs ist U_{n-2}. Aus

$$U_{n-2} = \frac{J_{n-2}}{\varrho} - \frac{A_{n-2}}{\varrho}$$

folgt

$$J_{n-2} = \varrho\, U_{n-2} + A_{n-2}$$

oder

$$J_{n-2} = \varrho \cdot 2\, A_n \frac{d}{r^2} + A_n\left(1 + \frac{d}{r}\right) = 2\, A_n\left(1 + \frac{3\,d}{r}\right),$$

wenn man $\frac{\varrho}{r}$ angenähert gleich 1 setzt. Es folgt

$$V_{n-2} = \frac{J_{n-2}}{r} - \frac{A_{n-2}}{\varrho} = A_n\left[\frac{1}{r} + \frac{3\,d}{r^2} - \frac{1}{\varrho} - \frac{d}{r\varrho}\right] = 3\, A_n \frac{d}{r^2},$$

wenn wiederum $r\varrho = r^2$ und $\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt wird. Man erhält also folgende Reihen. Für die Ladungen, abgesehen vom Vorzeichen und vom Faktor A_n,

$$1,\quad 1 + \frac{d}{r},\quad 1 + \frac{3\,d}{r},\quad 1 + \frac{6\,d}{r},\quad 1 + \frac{10\,d}{r},\ \ldots,\quad 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{d}{r}.$$

[Die Differenzen sind nämlich der Reihe nach $\frac{d}{r}$, $\frac{2\,d}{r}$, $\frac{3\,d}{r}$, ..., $\frac{(n-1)\,d}{r}$, die Faktoren von $\frac{d}{r}$ der Reihe nach 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$,

$\ldots, 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, das letzte Glied also $1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{d}{r} \cdot$] Für die Potentiale aber erhält man die Reihe

$$0, \quad \frac{d}{r^2} A_n, \quad \frac{2d}{r^2} A_n, \quad \frac{3d}{r^2} A_n, \ldots, \frac{nd}{r^2} A_n.$$

Nun ist aber nicht die letzte Ladung A_n, sondern die erste Innenladung gegeben, für welche

$$J_1 = \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}\right) A_n$$

gilt. Demnach ist

$$+ A_n = \frac{J_1}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}},$$

und dieser Wert ist in die gefundene Reihe einzusetzen. Die Potentialdifferenz zwischen dem ersten Kern und der letzten Schale ist also

$$D = \frac{nd}{r^2} A_n - 0 = \frac{nd}{r^2} \cdot \frac{J_1}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}$$

gegen

$$D = \frac{Ed}{r^2} = \frac{J_1 d}{r^2}$$

im Falle der vorher besprochenen Schaltung, d. h. sie ist $\frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}$ mal so grofs. Dieser Ausdruck kann $<1, = 1, >1$ sein. Setzt man ihn gleich 1, so erhält man $n = 1$, bezw. $n_1 = \frac{2r}{d}$. Dies sagt aus:

Bei $n = 1$ hat man eine gewisse Potentialdifferenz D zwischen Kern und Schale. Vermehrt man die Zahl der Flaschen, so wächst die Potentialdifferenz, erreicht einen Höchstwert, nimmt bis $n_1 = \frac{2r}{d}$ wieder zu D ab und sinkt dann unter D herab.

Welches ist der höchste Wert des Faktors?

Man setze

$$\frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}} = c,$$

woraus folgt

$$n = \frac{dc + 2r}{2dc} \pm \sqrt{\frac{(dc + 2r)^2}{4d^2c^2} - \frac{2r}{d} \cdot \frac{4dc^2}{4dc^2}}.$$

Soll nun n reell sein, so darf der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ werden. Er wird gleich Null, sobald

$$(dc + 2r)^2 = 8rdc^2$$

oder

$$dc + 2r = c\sqrt{8dr}$$

ist. Dies giebt den Grenzwert

$$c = \frac{2r}{\sqrt{8dr} - d}.$$

Setzt man diesen in die Gleichung für n ein, so fällt die Wurzel weg und man erhält

$$n = \frac{dc + 2r}{2dc} = \frac{d\dfrac{2r}{\sqrt{8dr} - d} + 2r}{2dc} = \sqrt{\frac{2r}{d}}.$$

Setzt man also die Anzahl der Flaschen gleich $\sqrt{\frac{2r}{d}}$, so erhält der Faktor $\dfrac{n}{1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{d}{r}}$ entweder einen gröfsten oder einen kleinsten Wert. Nachbarwerte zeigen, dafs es sich um einen Höchstwert handelt, d. h. um diejenige Flaschenzahl der Batterie, die die gröfste Potentialdifferenz ergiebt. Bei gebrochenem n wählt man die nächste ganze Zahl.

Hier bedeutet nun r den Radius der inneren Kugeln, d die Glasdicke. Ist beispielsweise der Radius r das 32 fache der Glasdicke, so ist

$$n = \sqrt{\frac{2 \cdot 32\, d}{d}} = \sqrt{64} = 8.$$

In diesem Falle geben demnach 8 Flaschen den Höchstwert der Potentialdifferenz, der nun $\dfrac{8}{1 + \dfrac{8 \cdot 7}{2} \cdot \dfrac{1}{32}} = \frac{64}{15}$ mal so grofs ist, als bei der Schaltung nebeneinander und bei gleicher Ladung der ersten Flasche.

Der Potentialwert des ersten Kernes

$$V_1 = \frac{nd}{r^2} A_n = \frac{ndJ_1}{r^2\left(1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\dfrac{d}{r}\right)}$$

giebt an, wie viel Arbeit es am Schlusse macht, die elektrische Menge 1 positiver Art auf diese Kugel zu bringen, was anfangs die Arbeit Null beanspruchte. Während des ganzen Verlaufs war diese Arbeit proportional der Flaschenzahl und der Ladung J_1, im Durchschnitt also handelt es sich für die elektrische Einheit um den Mittelwert $\frac{V}{2}$, für die Menge J_1 um die Durchschnittsarbeit

$$\frac{1}{2} V_1 J_1 = \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{n d J_1^2}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}.$$

Dies ist zugleich die Energie der Ladung der Kaskadenbatterie. Im obigen Falle $r = 32 d$ erreicht sie den Höchstwert für 8 Flaschen. Er hat den Betrag

$$\frac{1}{2r^2} \cdot \frac{64}{15} d J_1^2 = \frac{32 d J_1^2}{15 r^2} = \frac{128 \pi d J_1^2}{15 O}.$$

Die Energie ist proportional dem Quadrate der Ladung der ersten Flasche. Der Höchstwert ist aufserdem proportional dem Faktor $\frac{d}{O}$, wo d die Flaschendicke, O die Oberfläche jeder Innenkugel ist.

Ist $J = E$, d. h. ist die Ladung der ersten Kugel in beiden Schaltungsfällen dieselbe, ist ferner die Glasdicke und die Flaschenzahl dieselbe, so verhalten sich die aufgespeicherten Energiemengen bei Neben- und Kaskadenschaltung wie

$$\frac{n E^2 d}{2r^2} : \frac{n J_1^2 d}{2r^2\left[1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}\right]} \quad \text{oder wie} \quad 1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r} : 1.$$

Die erreichten Potentialdifferenzen dagegen verhalten sich wie

$$\frac{Ed}{r^2} : \frac{J_1 d}{r^2} \cdot \frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}} \quad \text{oder wie} \quad 1 : \frac{n}{1 + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d}{r}}.$$

Bildet man für beide Fälle den Quotienten aus Energie und Potentialdifferenz, so findet man für den einen Fall $\frac{E}{2}$, für den andern $\frac{nJ_1}{2}$, das Verhältnis für beide Fälle ist also $1 : n$.

Um also dieselbe Potentialdifferenz zu erreichen, hat man im Falle der Kaskadenbatterie die n fache Arbeit nötig, wie bei der Nebenschaltung.

Man ist aber mit Hilfe des Machschen Kommutators imstande, eine Batterie mit geringem Aufwande zunächst unter Nebenschaltung zu laden und dann in eine Kaskadenbatterie zu verwandeln, worauf durch Influenzwirkung die Anordnung eine ganz andere wird. Während man aber bei der Kaskadenbatterie nur eine Elektrizitätsmenge E zur Ladung der ersten Flasche nötig hat, ist bei der Machschen Methode für jede Flasche so viel Ladung nötig, also die n fache Menge nE.

[Man vergleiche damit die Erscheinungen, welche bei galvanischen Batterien auftreten, sobald man nebeneinander oder nacheinander schaltet. Das eine Mal hat man $n$fache Strömungen und einfache Potentialdifferenz, das andere Mal des großen Widerstandes wegen einfache Strömungen aber $n$fache Potentialdifferenz.]

Die Gesamtladung der Innenkugeln ist nach der obigen Theorie, wenn man mit der n^{ten} beginnt,

$$A_n\left[1+\left(1+\frac{d}{r}\right)+\left(1+\frac{3d}{r}\right)+\left(1+\frac{6d}{r}\right)+\left(1+\frac{10d}{r}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\right)\right].$$

Die Reihe nimmt zu. Ist J_1 die Ladung der letzten (vorher ersten) Kugel, so ist offenbar die Summe der Ladungen kleiner, als nJ_1, also diese Elektrizitätsmenge kleiner als die bei entsprechender Nebenschaltung angesammelte Menge nJ_1.

Die Berechnung der Summe hat nur mathematischen Wert. Nach dem Method. Lehrbuch II, Seite 117, ergiebt sich

$$A_n\left[n+\frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d}{r}\right]=nA_n\left[1+\frac{n^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d}{r}\right]=nA_n\frac{6r+(n^2-1)d}{6r}$$
$$=\frac{nJ_1}{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}\cdot\frac{6r+(n^2-1)d}{6r}=\frac{n}{3}J_1\frac{6r+(n^2-1)d}{2r+n(n-1)d}.$$

Für sehr großes n strebt dies dem Werte $\frac{n}{3}J$ zu. Die Kapazität ist gleich $\frac{\text{Ladung}}{\text{Potential}}$, also, da nur die erste Kugel geladen wird

$$\frac{\left(1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}\right)r\varrho}{nd}=\frac{r\varrho}{nd}+\frac{n-1}{2}\varrho.$$

Da oben mehrfach $r\varrho=r^2$ gesetzt und die gegenseitige Influenz der Flaschen vernachläfsigt wurde, hat die Untersuchung nur den Wert einer informierenden Annäherungsbetrachtung, die immerhin über das Wesentliche aufklärt. Um diese Vernachlässigung zu charakterisieren, soll das Potential der ersten Flasche für äufsere Punkte in der Entfernung R gebildet werden. Es ist gleich

$$\frac{J_1}{R}-\frac{A_1}{R}=\frac{1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{d}{r}}{R}A_n-\frac{1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{d}{r}}{R}A_n=\frac{A_n}{R}\frac{d(n-1)}{r}$$
$$=\frac{J_1 d(n-1)}{2r+n(n-1)d}\cdot\frac{1}{R}=\frac{J_1}{R}\cdot\frac{1}{n+2\frac{r}{d}\cdot\frac{1}{n-1}}.$$

Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen kleiner als $\frac{J_1}{nR}$, so dafs z. B. bei 10 Flaschen der Einflufs geringer ist, als $\frac{1}{10}$ des Einflusses der Ladung der Innenkugel allein. Ist z. B noch $r = 27\,d$, also der Durchmesser das 27fache der Glasdicke, so würde sein

$$\text{Potential} = \frac{J_1}{R} \cdot \frac{1}{10 + 54 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{16} \frac{J_1}{R}.$$

72) Eine andere Betrachtungsweise, die aber ebenso wenig genaue Resultate giebt, findet sich in einigen physikalischen Lehrbüchern. Dort wird die Ladung der ersten Innenflasche gleich E gesetzt, die Influenzelektrizität erster Art gleich $-mE$, wo m ein echter Bruch ist, weil die Influenzelektrizität zweiter Art nicht ins Unendliche abfliefsen konnte (auch nicht die beiden andern kugelförmig umgiebt) und durch ihre Anziehung hemmend auf die Scheidung einwirkt. Unter der vereinfachenden Annahme, dafs dieses m in allen Flaschen dasselbe sei, findet man als Gesamtladung

$$E(1 + m + m^2 + \cdots + m^{n-1}) = E \frac{1 - m^n}{1 - m},$$

was nun ebenfalls kleiner als nE ist. Dabei ist also an Stelle der arithmetischen Reihe höherer Ordnung eine einfachere geometrische getreten. Hier soll die weitere Berechnung nicht durchgeführt werden. Es handelte sich nur darum, den betreffenden Unterschied aufzuklären.

73) **Aufgabe.** Das Potential des geladenen kugelförmigen Kondensators graphisch darzustellen.

Auflösung. Sind die Radien wieder gleich ϱ, ϱ_1 (und ϱ_2), so handelt es sich nach Nr. 63 für Punkte innerhalb der inneren Kugel um

$$E\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = E \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho \varrho_1} = \frac{Ed}{\varrho \varrho_1},$$

also um eine konstante Gröfse. Ist nun $MC = \frac{E}{\varrho}$ und $-MC_1 = \frac{-E}{\varrho_1}$, so ist $MC - MC_1$ oder $C_2 C$ die den Potentialwert darstellende Strecke. Sie gilt für das ganze Rechteck CDD_2C_2. Aufserhalb der inneren Kugel nimmt das Potential derselben ab nach dem Gesetz der gleichseitigen Hyperbel DEF, während von A bis B das Potential der Schale noch konstant gleich $-\frac{E}{\varrho_1}$ bleibt. Das Diagramm für die Innenkugel giebt eine Fläche $ABED$, von der ABD_1E_1 abzuziehen ist, so dafs eine Fläche DD_2E bleibt. Die Lote dieser Fläche geben