



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

73) Potential des geladenen kugelförmigen Kondensators in graphischer Darstellung

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Dieser Ausdruck ist unter allen Umständen kleiner als $\frac{J_1}{nR}$, so daß z. B. bei 10 Flaschen der Einfluß geringer ist, als $\frac{1}{10}$ des Einflusses der Ladung der Innenkugel allein. Ist z. B. noch $r = 27d$, also der Durchmesser das 27fache der Glasdicke, so würde sein

$$\text{Potential} = \frac{J_1}{R} \cdot \frac{1}{10 + 54 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{16} \frac{J_1}{R}.$$

72) Eine andere Betrachtungsweise, die aber ebenso wenig genaue Resultate giebt, findet sich in einigen physikalischen Lehrbüchern. Dort wird die Ladung der ersten Innenflasche gleich E gesetzt, die Influenz elektrizität erster Art gleich $-mE$, wo m ein echter Bruch ist, weil die Influenz elektrizität zweiter Art nicht ins Unendliche abfließen konnte (auch nicht die beiden andern kugelförmig umgiebt) und durch ihre Anziehung hemmend auf die Scheidung einwirkt. Unter der vereinfachenden Annahme, daß dieses m in allen Flaschen dasselbe sei, findet man als Gesamtladung

$$E(1 + m + m^2 + \dots + m^{n-1}) = E \frac{1 - m^n}{1 - m},$$

was nun ebenfalls kleiner als nE ist. Dabei ist also an Stelle der arithmetischen Reihe höherer Ordnung eine einfachere geometrische getreten. Hier soll die weitere Berechnung nicht durchgeführt werden. Es handelte sich nur darum, den betreffenden Unterschied aufzuklären.

73) **Aufgabe.** Das Potential des geladenen kugelförmigen Kondensators graphisch darzustellen.

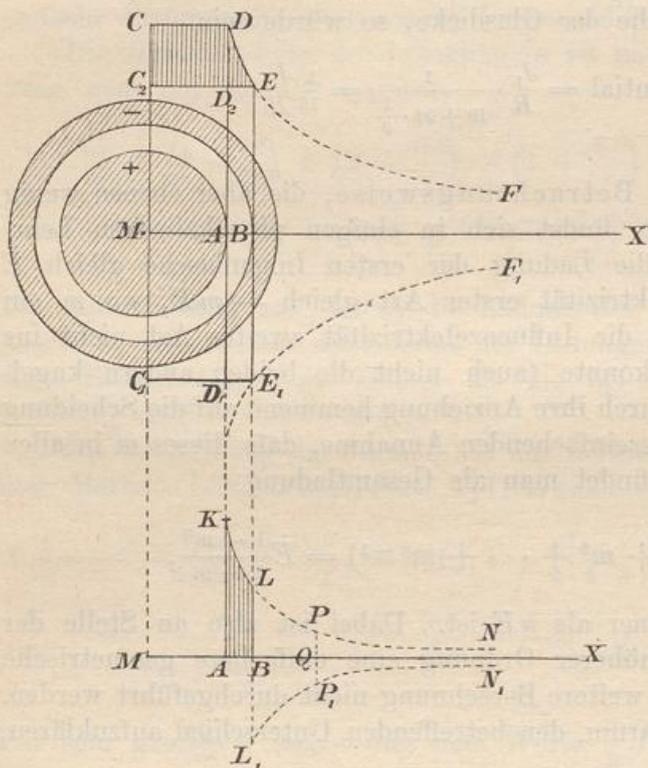
Auflösung. Sind die Radien wieder gleich ϱ , ϱ_1 (und ϱ_2), so handelt es sich nach Nr. 63 für Punkte innerhalb der inneren Kugel um

$$E \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right) = E \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho \varrho_1} = \frac{Ed}{\varrho \varrho_1},$$

also um eine konstante Größe. Ist nun $MC = \frac{E}{\varrho}$ und $-MC_1 = \frac{-E}{\varrho_1}$, so ist $MC - MC_1$ oder C_2C die den Potentialwert darstellende Strecke. Sie gilt für das ganze Rechteck CDD_2C_2 . Außerhalb der inneren Kugel nimmt das Potential derselben ab nach dem Gesetz der gleichseitigen Hyperbel DEF , während von A bis B das Potential der Schale noch konstant gleich $-\frac{E}{\varrho_1}$ bleibt. Das Diagramm für die Innenkugel giebt eine Fläche $ABED$, von der ABD_1E_1 abzuziehen ist, so daß eine Fläche DD_2E bleibt. Die Lote dieser Fläche geben

die Potentialwerte zwischen A und B an. Für B wird der Potentialwert gleich Null. Für die außerhalb der Schale liegenden Punkte der X -Achse ist der Potentialwert gleich Null, denn die Lote zweier übereinstimmender Hyperbeln sind voneinander abziehen. Die eine Hyperbel hat die Gleichung

Fig. 51.



Null, denn die Lote zweier übereinstimmender Hyperbeln sind voneinander abziehen. Die eine Hyperbel hat die Gleichung

$$xy = MADC \\ = \frac{E}{\varrho} \cdot \varrho = E,$$

die andere die Gleichung

$$xy = MC_1E_1B \\ = -\frac{E}{\varrho_1} \cdot \varrho_1 = -E.$$

Die Dichtigkeit auf der Innenkugel ist $\delta = \frac{E}{4\varrho^2\pi}$, die auf der Außenkugel

$$\delta_1 = -\frac{E}{4\varrho_1^2\pi} = -\delta \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}.$$

Setzt man $\varrho_1 = \varrho + \delta$, so kann man schreiben

$$\delta_1 = -\delta \frac{\varrho^2}{(\varrho + \delta)^2} = -\delta \frac{\varrho^2}{\varrho^2 \left(1 + \frac{\delta}{\varrho}\right)^2} = -\frac{\delta}{\left(1 + \frac{\delta}{\varrho}\right)^2}.$$

Je kleiner $\frac{\delta}{\varrho}$ ist, um so weniger sind δ_1 und δ dem absoluten Betrage nach voneinander verschieden. Die Anziehung in A ist von der Stärke

$$\frac{E}{\varrho^2} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho^2} = 4\pi\delta,$$

an der Stelle B ist sie gleich $4\pi\delta \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}$. Zwischen A und B in beliebigem Abstände ist sie von der Stärke $y = \frac{4\pi\delta\varrho^2}{x^2}$. Dies ist die Gleichung der Gravitationskurve, welche das Arbeitsdiagramm $ABLK$ begrenzt, wie es in Figur 51 unten angebracht ist. Längs der

Strecke MA und längs der Horizontalen von B bis $+\infty$ ist die Diagrammhöhe gleich Null. Ist der Kern eine konzentrische Hohlkugel, so ist die Sache dieselbe.

74) Der Fall zweier unbegrenzten parallelen Ebenen. Man denke sich den Abstand d ebenso groß wie vorher, die Radien ϱ und ϱ_1 aber sehr groß. Soll δ dasselbe sein, wie vorher, so folgt aus $\frac{E}{4\varrho^2\pi} = \delta$, daß die Ladung in dem Maße verstärkt werden muß, wie ϱ^2 vergrößert worden ist. Dabei wird $\delta_1 = \delta$. Das Potentialdiagramm C_2BDC der letzten Figur fällt mit der Geraden C_2E sehr weit nach oben (BE ist proportional ϱ), DE wird geradlinig, also D_2ED ein rechtwinkliges Dreieck. Die Anziehung bei A bleibt von der Stärke $\frac{E}{\varrho^2} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho^2} = 4\pi\delta$, an der Stelle B wird sie gleich $4\pi\delta\frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}$, also da $\varrho = \varrho_1$ wird, ebenfalls gleich $4\pi\delta$. Das Anziehungsdiagramm zwischen A und B wird also ein Rechteck vom Inhalte $4\pi\delta d = \frac{E}{\varrho^2}d$.

Denkt man sich die äußere Kugel mit der Erde in Berührung, so ist auf ihr das Potential gleich Null. In A ist das Potential gleich $\frac{E}{\varrho} = \frac{4\varrho^2\pi\delta}{\varrho} = 4\varrho\pi\delta$, in $B = \frac{E}{\varrho_1}$, also ist die Potentialdifferenz gleich

$$\frac{E}{\varrho} - \frac{E}{\varrho_1} = E \frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1} = \frac{Ed}{\varrho\varrho_1},$$

also, da $\varrho = \varrho_1$ zu setzen ist, gleich $\frac{Ed}{\varrho^2}$, wie vorher. Wird das Potential in B gleich Null gesetzt, so ist es in A gleich $\frac{Ed}{\varrho^2} = 4\pi\delta d$ zu setzen.

Dasselbe Resultat ergibt sich auch auf anderem Wege. Die Kraftlinien sind bei der Kugel Radien, bei der Ebene also Lote auf der Ebene. Die Kraftströme sind also prismatisch, zweckmäßig nimmt man sie als quadratische Prismen an. Die Strömung der inkompressiblen Flüssigkeit hat in ihnen konstante Geschwindigkeit, denn $vF = v_1F_1$ giebt $v = v_1$ für $F = F_1$. Demnach ist auch $p = p_1$, d. h. die Anziehung einer homogenen Ebene ist konstant, das Arbeitsdiagramm also ist ein Rechteck, sein Inhalt nimmt auf gleichen Strecken um denselben Betrag zu, bzw. ab, folglich ist das Potentialdiagramm durch eine schräge Gerade begrenzt.

In Fig. 52 sind I und II die beiden als unbegrenzt zu denkenden parallelen Ebenen. Außerhalb beider heben sich die Wirkungen auf, weil $\delta_1 = -\delta$ ist. Ist $AK = 4\pi\delta$, so ist $ABLK$ das Arbeits-