Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

Kapitel V. Die Mehrpunktprobleme.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Kapitel V.

Die Mehrpunktprobleme.

78) **Vorbemerkung.** Wirken mehrere Punkte anziehend, so werden die Kräfte nach dem Parallelogramm addiert. Graphisch geschieht dies durch das einfache Aneinandersetzen der Kräfte nach der Streckentheorie, rechnend erreicht man dasselbe durch mehrfache Anwendung der Formeln

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \cos\alpha}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{p_2}{p} \sin\alpha,$$

wo p_1 und p_2 die Seitenkräfte sind, α der von ihnen eingeschlossene Winkel, p die Resultante, α_1 der von p und p_1 eingeschlossene Winkel ist.

Es fragt sich nun, nach welcher Formel die Potentialwerte zu addieren sind. Es wird sich hier im Anschlufs an Nr. 21 in voller Bestimmtheit herausstellen, dafs, wenn die Einzelpotentiale V_1 und V_2 sind, das Gesamtpotential durch einfache algebraische Addition als $V = V_1 + V_2$ gefunden wird, worin eine aufserordentliche Erleichterung und zugleich die ganze Stärke des Potentialbegriffs liegt. Dieser gehört also zu denjenigen Gröfsen, die von den Engländern nach Hamilton als Skalaren (im Gegensatz zu den Vektoren) bezeichnet werden. Bei diesen Gröfsen geschieht die Addition einfach algebraisch, weil sie selbst durch eine einzige Zahl vollständig dargestellt werden, wie z. B. Länge einer Linie, Inhalt einer Fläche, Inhalt eines Körpers, Masse einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers, Arbeit einer Kraft, Energie einer bewegten Masse, hydrostatischer Druck an irgend einer Stelle u. s. w. Bei den Vektoren dagegen sind mehrere numerische Angaben nötig. Zu ihnen gehören Kräfte, die, wie die Strecken, nach Gröfse und Richtung zu geben sind, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen u. dgl. Ihre Addition folgt besonderen komplizierten Gesetzen. Gelingt es, ein Problem von den Vektoren zu befreien und auf die Skalaren zu beschränken, so ist damit eine erhebliche Vereinfachung erzielt. Dies geschieht bei der

Zurückführung von Problemen der Mechanik auf solche der Potentialtheorie.

Von den Hamiltonschen Methoden, die auf die Quaternionen geführt haben, soll hier nichts vorausgesetzt werden, da ein einfacher Hilfssatz ausreicht, der in jedem Lehrbuche der Mechanik stehen sollte.

79) Hilfssatz aus der Mechanik. Die Arbeit der Resultante ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Seitenkräfte.

Beweis. 1. Die Resultante von p_1 und p_2 sei p, $PQ = w$ der Weg des Angriffspunktes P, so daſs pw die Arbeit der Resultante ist. Projiziert man den Weg w auf die Richtungslinien der Seitenkräfte, so erhält man $PQ_1 = w_1$ und $PQ_2 = w_2$ als die (virtuellen) Wege in den Richtungen dieser Kräfte, so daſs die in diesen Richtungen vollführten Arbeiten $p_1 w_1$ und $p_2 w_2$ sind. Ihre algebraische Summe ist

$$p_1 w_1 + p_2 w_2 = p_1 w \cos\alpha_1 + p_2 w \cos\alpha_2 = w(p_1 \cos\alpha_1 + p_2 \cos\alpha_2)$$
$$= w(PB_1 + PB_2) = w(PB_1 + B_1 C) = w_1 PC = pw,$$

sie ist also gleich der Arbeit der Resultante. Vgl. Fig. 57.

Fig. 57.

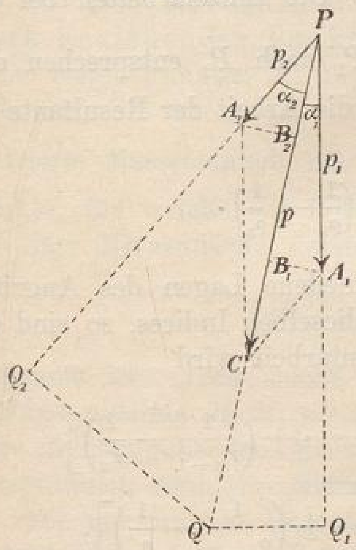
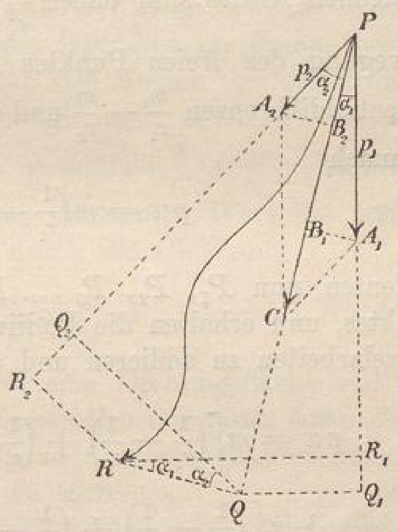


Fig. 58.



Die Addition der Arbeiten geschieht also einfach algebraisch ohne jede Berücksichtigung der Richtungen. Arbeitsgröſsen gehören daher zu den Skalaren.

2. Behalten die Kräfte p, p_1 und p_2 ihre Richtungen stets bei, so kann P einen beliebigen Weg PR zurücklegen, ohne daſs sich

etwas ändert. Geschieht die Bewegung z. B. in der Ebene der Kräfte, so ist der Weg auf die drei Kraftlinien zu projizieren, was die „virtuellen" Wege PQ, PQ_1 und PQ_2 geben mag. Projiziert man noch Q nach Q_1 und Q_2, und setzt man $RQ = e$, so ist, da auch bei R und Q die Winkel α_1 und α_2 auftreten, $R_1Q_1 = e \sin \alpha_1$, $R_2Q_2 = e \sin \alpha_2$, also, da $A_1B_1 = A_2B_2$, oder $p_1 \sin \alpha_1 = p_2 \sin \alpha_2$ ist, $p_1 \cdot R_1Q_1 = p_2 \cdot Q_2R_2$. Vorher war $p_1 \cdot PQ_1 + p_2 \cdot PQ_2 = p \cdot PQ$, jetzt ist $(p_1 \cdot PQ_1 - p_1 \cdot R_1Q_1) + (p_2 \cdot PQ_2 + p_2 \cdot Q_2R_2) = p \cdot PQ$ oder $p_1 \cdot PR_1 + p_2 \cdot PR_2 = p \cdot PQ$. Der Satz bleibt also bestehen.

Tritt der Angriffspunkt aus der Ebene der Kräfte heraus, so kann sich z. B. R senkrecht über der gezeichneten Lage im Raume befinden. Die Figur ist dann die Projektion der zugehörigen räumlichen Figur. Am Beweise ändert sich sonst nichts. Vgl. Fig. 58.

3. Ändern die Kräfte während der Bewegung des Angriffspunktes stetig ihre Richtungen, wie es z. B. bei der Anziehung durch mehrere feste Punkte geschieht, so gilt der obige Beweis zunächst nur für eine unendlich kleine Bewegung, durch Summierung aber für die gesamte Bewegung.

4. Das Beispiel der Anziehung durch zwei feste Punkte nach dem Newtonschen Gesetze wird dies erläutern. Die auf die Einheit wirkenden Kräfte sind dabei $\frac{m}{r_1^2}$ und $\frac{\mu}{\varrho_1^2}$. Die Einzelarbeiten bei der Bewegung des freien Punktes P von P_1 nach P_2 entsprechen den Potentialdifferenzen $\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$ und $\frac{\mu}{\varrho_1} - \frac{\mu}{\varrho_2}$, die Arbeit der Resultante ist demnach

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Bedeuten nun $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ verschiedene Lagen des Angriffspunktes, und erhalten die Radiivectores dieselben Indices, so sind die Einzelarbeiten zu addieren und die Gesamtarbeit wird

$$pw = m\left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}\right)\right]$$
$$+ \mu\left[\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) + \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\varrho_{n-1}} - \frac{1}{\varrho_n}\right)\right],$$

oder

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_n}\right).$$

Dies gilt für beliebig gestaltete Wege von beliebiger Länge.

Entfernt man p ins Unendliche, so ist der Arbeitsaufwand

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{m}{r_1} + \frac{\mu}{\varrho_1},$$

d. h. gleich der algebraischen Summe der Einzelpotentiale.

Man bezeichnet die dazu nötige Arbeit als das Gesamtpotential, folglich gilt zunächst für zwei Punkte der Satz:

Das Gesamtpotential ist gleich der algebraischen Summe der Einzelpotentiale $V = V_1 + V_2$.

Die Ausdehnung auf mehrere Punkte, die beliebig im Raume lagern und anziehend wirken, sei dem Leser überlassen. Neues tritt dabei nicht auf.

Handelt es sich um ein aus unendlich vielen Punkten bestehendes Massengebilde, also um eine Linie, oder um eine Fläche, oder einen Körper von beliebiger Gestalt, so wird die Ermittelung der Kraftresultanten in der Regel auf Schwierigkeiten stofsen. Leichter ist es im allgemeinen, die algebraische Addition der Potentialwerte durchzuführen und aus dem Gesamtpotential auf einem noch zu lehrenden Wege die Kraftresultante abzuleiten. Aufserdem erhalten gewisse Sätze der Mechanik durch die Benutzung des Potentialbegriffs eine weit einfachere Form, als bei der Anwendung des Kraftbegriffs. Darin liegt der in Nr. 14 angedeutete weitere Vorteil der Greenschen Theorie.

80) Die Niveauflächen für das Problem zweier gleich stark anziehender Punkte. In zwei irgendwo im Raume befindlichen festen Punkten M_1 und M_2 mögen sich Massen von der Gröfse 1 befinden. Sie wirken auf die frei bewegliche in einem Punkte koncentrierte Masseneinheit ein mit dem Potentiale $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Sämtliche Punkte, für welche das Potential einen konstanten Wert hat, liegen auf einer Niveaufläche, deren Gestalt durch die Gleichung

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$$

bestimmt ist. Jede solche Fläche ist eine Drehungsfläche mit der Verbindungslinie $M_1 M_2$ als Achse. Es ist also nur nötig einen durch diese Achse gehenden Meridianschnitt zu untersuchen und nur von Niveaulinien, statt von Niveauflächen zu sprechen.

Die mechanische Bedeutung der Niveaulinien bezw. Niveauflächen besteht darin, dafs zur Bewegung der Masseneinheit von einer solchen Fläche nach einer anderen sie umschliefsenden eine gewisse Arbeit nötig ist, die gleich dem Potentialunterschiede ist. Zur Bewegung der Masseneinheit nach einer der inneren Flächen ist nicht positive Arbeit nötig, sondern negative, d. h. diese wird durch die anziehenden Punkte ausgeübt und vermehrt die Energie $\frac{1 \cdot v^2}{2}$ der frei beweglichen

Masse um einen Betrag, der gleich der Potentialdifferenz für die Endpunkte des Weges ist. Zur Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf der Fläche selbst ist die Arbeit Null nötig. Die Resultante der Anziehung steht also senkrecht auf der Niveaufläche. Nun läfst sich aber die Resultante der Kräfte $p_1 = \frac{1}{r_1^2}$ und $p_2 = \frac{1}{r_2^2}$ aus r_1 und r_2 leicht konstruieren, folglich ist die Resultante und damit zugleich die Normale der Niveaulinie in jedem Punkte elementar konstruierbar, ebenso die Tangente und die durch diese senkrecht zum Meridianschnitt gelegte Tangentialebene der Niveaufläche elementar konstruierbar.

Da jede Niveaulinie dieses Problems zwei Symmetrieachsen hat, die Gerade $M_1 M_2$ und die zugehörige Mittelsenkrechte, so kann man die Betrachtung auf einen Quadranten beschränken.

Denkt man sich die Niveaulinien so aufeinander folgend, dafs die Werte von c einer arithmetischen Reihe folgen, z. B. der Reihe

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots, \frac{n+n}{n} = 2, \frac{2n+1}{n}, \ldots$$

so gilt folgendes:

Wie sich auch P von P_1 aus nach aufsen hin bewege, stets ist von einer Niveaulinie zur andern derselbe Arbeitsaufwand $\frac{1}{n}$ nötig. Geht P nach innen, so ist natürlich der Arbeitsaufwand negativ. Geschieht nämlich die kleine Verschiebung um w längs der Kraftlinie und ist der Mittelwert des Widerstandes gleich p, so ist die geleistete Arbeit gleich pw. Weicht die Richtung des Weges um α ab, so handelt es sich um die Kraft $p_1 \cos\alpha$ und den Weg $w_1 = \frac{w}{\cos\alpha}$, so dafs wiederum $p_1 w_1 = pw$ ist.

Trägt man an jeder Stelle des Weges auf der Ebene ein Lot auf, welches gleich der Projektion der Anziehungsresultante p an dieser Stelle auf die Bewegungsrichtung ist, so erhält man das Arbeitsdiagramm für den Verlauf der Bewegung von P. Wie nun auch von P_1 aus nach einer der Niveaulinien gewandert werde, stets erhält man denselben Arbeitsaufwand und dieselbe Diagrammfläche, als ob man den Weg von der einen Niveaulinie zur andern auf der x-Achse oder y-Achse gemacht hätte. (Die x-Achse soll die Verbindungslinie der beiden festen, anziehenden Punkte sein, die y-Achse die Mittelsenkrechte dazu.) Geht das Diagramm von P_1 aus bis ins Unendliche auf beliebig gewundenen Wegen, stets ist sein Inhalt gleich $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. (Vergl. dazu Nr. 14.)

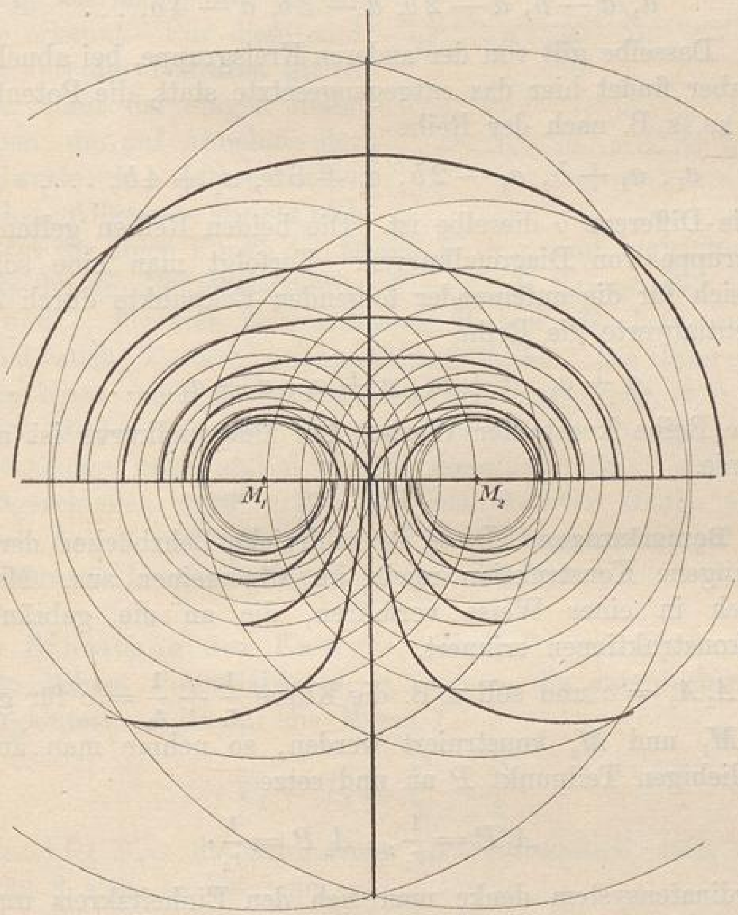
81) **Aufgabe.** Die Niveaulinien für dieses Problem zu konstruieren.

Auflösung. Man schlage um die festen Punkte M_1 und M_2 Kreise mit den Radien, deren reciproke Werte einer arithmetischen Reihe, z. B. 0, 1, 2, 3, 4, ... entsprechen, also z. B. mit den Radien

$$\infty, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots,$$

allgemeiner mit den in Fig. 10 zu $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ gehörigen Ordinaten (und etwa auch mit den durch Halbierung der Grundlinien

Fig. 59.



zu bestimmenden Ordinaten), so daſs man ein Netz krummliniger Vierecke erhält. Die Diagonalkurven dieses Netzes können mit beliebiger Genauigkeit eingezeichnet werden, indem man durch fortgesetzte Interpolation von Ordinaten der Fig. 10 die Zahl der Vierecke beliebig vermehrt. Im oberen Teile der Fig. 59 sind die hierher gehörigen Diagonalkurven gezeichnet. Der untere Teil, der symmetrisch zum oberen ist, ist dort weggelassen. (Die unten gezeichnete Kurvengruppe kommt später zur Sprache, sie entspricht den Niveaulinien für Punkte M_1 und M_2, von denen der eine ebenso stark abstofsend wirkt, wie der andere anziehend.)

Beweis. Dafs diese Diagonalkurven solche konstanten Potentials, also Niveaulinien sind, ergiebt sich folgendermafsen.

Die zu M_1 gehörige Kreisgruppe giebt bei zunehmenden Radien nach der Konstruktion Potententialwerte, die nach arithmetischer Reihe abnehmen. Von irgend einem der Eckpunkte aus möge es sich z. B. um die Reihe

$$a,\ a-b,\ a-2b,\ a-3b,\ a-4b,\ \ldots$$

handeln. Dasselbe gilt von der anderen Kreisgruppe, bei abnehmenden Radien aber findet hier das entgegengesetzte statt, die Potentialwerte nehmen zu, z. B. nach der Reihe

$$a_1,\ a_1+b,\ a_1-2b,\ a_1+3b,\ a_1+4b,\ \ldots,$$

wobei die Differenz b dieselbe ist. Die beiden Reihen gelten für die obere Gruppe von Diagonalkurven. Verfolgt man eine solche, so ergiebt sich für die aufeinander folgenden Eckpunkte durch Addition der Potentialwerte die Reihe

$$a+a_1,\ a+a_1,\ a+a_1,\ a+a_1,\ \ldots,$$

d. h. eine Reihe konstanter Werte. Die Diagonalkurve ist also eine Niveaulinie.

82) **Bemerkungen.** Diese in zahlreiche Lehrbücher der Physik übergegangene Konstruktion reicht im allgemeinen aus. Man kann aber auch in einer Weise verfahren, die an die gebräuchlichen Ellipsenkonstruktionen erinnert.

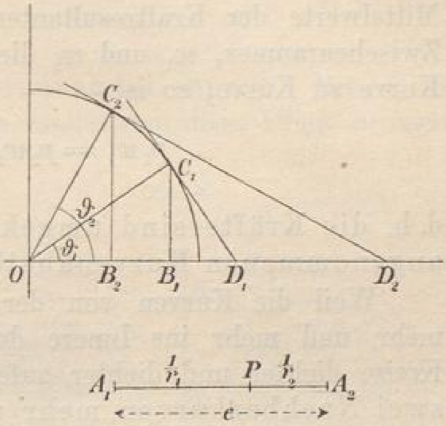
Ist $A_1A_2 = c$ und soll z. B. die Kurve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$ für gegebene Punkte M_1 und M_2 konstruiert werden, so nehme man auf A_1A_2 einen beliebigen Teilpunkt P an und setze

$$A_1P = \frac{1}{r_1},\quad A_2P = \frac{1}{r_2}.$$

Im Koordinatensystem denke man sich den Einheitskreis um O geschlagen und mache auf der X-Achse $OB_1 = A_1P$, $OP_2 = A_2P$. Die in B_1 und B_2 auf der X-Achse errichteten Lote geben auf dem Kreise Punkte C_1 und C_2. Die Tangenten in diesen schneiden die X-Achse in D_1 und D_2. Jetzt ist $OD_1 = r_1$ und $OD_2 = r_2$. Mit diesen Radien schlage man um die festen Punkte M_1 und M_2 (z. B. um die Punkte ± 1) Kreisbogen, die, wenn sie sich schneiden, zwei und bei Vertauschung der Mittelpunkte nochmals zwei Punkte der

Kurve geben, so dafs man nur einen Quadranten zu konstruieren nötig hat. Jeder Teilpunkt von $A_1 A_2$ giebt so im allgemeinen vier reelle Punkte, jedoch hat die Teilung, wie bei der Ellipsenkonstruktion, eine bestimmte Grenze.

Fig. 60.



Giebt man $A_1 A_2 = c$ verschiedene Werte, so erhält man die ganze Kurvengruppe. Die vorige Methode giebt ganz von selbst eine potentiell gleichwertige Einteilung, wie man sofort an der Y-Achse erkennt. Für diese sind (vgl. Fig. 59) die Vektoren gleich und jeder folgt der obigen Reihe der Radien, die auf Abnahme der Potentialwerte in arithmetischer Reihe führt. Allgemein ergiebt sich dies so: Ist für einen Punkt der Ebene $V_1 = c_1$ und zugleich $V_2 = c_2$, so ist für ihn die Pontentialsumme $V = V_1 + V_2 = c_1 + c_2$. Folgen also c_1 und c_2 für sich arithmetischen Reihen, die beide zunehmen, so wächst auch V nach arithmetischer Reihe. Die Intervalle von Kurve zu Kurve sind also potentiell gleichwertig, d. h. den angezogenen Körper von einer Kurve zur anderen zu bringen, erfordert bei dem Gange nach aufsen überall dieselbe Arbeit, welcher Weg auch eingeschlagen werde. Bei dem umgekehrten Gange wird entsprechende Arbeit gewonnen, d. h. der frei bewegliche Körper gewinnt entsprechend an Geschwindigkeit und an Energie.

83) Erhaltung der Energie. Sind P_1 und P_2 im letzteren Falle die beiden Potentialwerte, v_1 und v_2 die entsprechenden Geschwindigkeiten, so ist für die Masse 1

$$P_2 - P_1 = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}.$$

Betrachtet man die Schlufslage als veränderlich, läfst man also die Marke 2 weg, so hat man

$$P - P_1 = \frac{1}{2}\left(v^2 - v_1^2\right)$$

oder

$$P - \frac{v^2}{2} = P_1 - \frac{v_1^2}{2},$$

d. h. $P - \frac{v^2}{2}$ ist eine konstante Gröfse. Darin liegt der Satz von der Erhaltung der Energie für dieses Problem.

84) Gesetz der Abstände zwischen zwei Niveaulinien. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Kurven ist veränderlich. Die Arbeit, die nötig ist, den beweglichen Körper von der einen zur anderen zu bringen, ist überall dieselbe. Sind also p_1 und p_2 die Mittelwerte der Kraftresultanten an zwei verschiedenen Stellen des Zwischenraumes, w_1 und w_2 die entsprechenden kürzesten Wege von Kurve zu Kurve, so ist

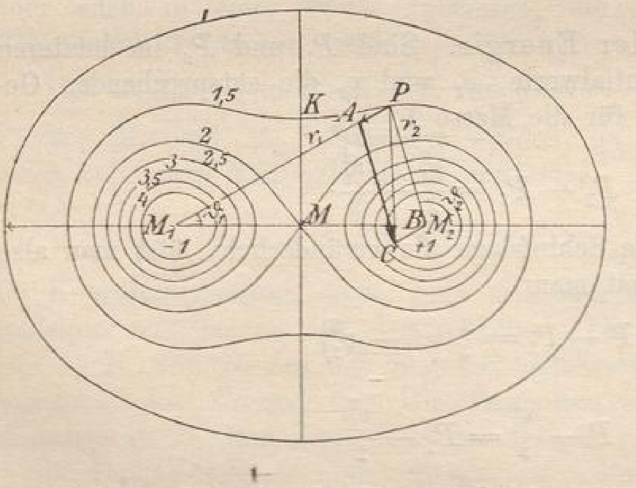
$$p_1 w_1 = p_2 w_2 \quad \text{oder} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{w_2}{w_1},$$

d. h. die Kräfte sind umgekehrt proportional den als klein angenommenen Kurvenabständen.

Weil die Kurven von der Y-Achse aus in jedem Quadranten mehr und mehr ins Innere der einen Kreisschar rücken, wo die Kreise dichter und dichter aufeinander folgen, so nähern sich je zwei Nachbarkurven mehr und mehr und erreichen auf der X-Achse das Minimum des Abstandes, während auf der Y-Achse das Maximum stattfindet.

Für die aus getrennten Ovalen bestehenden Kurven wird auf der X-Achse sowohl das Maximum, als auch das Minimum des Abstandes erreicht, innen das eine, aufsen das andere. Dem Maximum des Abstandes entspricht auf der Niveaulinie das Minimum der Anziehungsresultante, dem Minimum des ersteren entspricht das Maximum der anderen. Es ist also zu betonen, dafs auf den Niveaulinien bezw. auf den durch Drehung um die X-Achse entstehenden Niveauflächen zwar das Potential konstant ist, aber nicht die Gröfse der Anziehungskraft. Für die Elektrizitätslehre z. B. folgt daraus, dafs die Kurven gleicher Intensität im allgemeinen ganz andere Gestalt haben, als die Kurven gleichen Potentials.

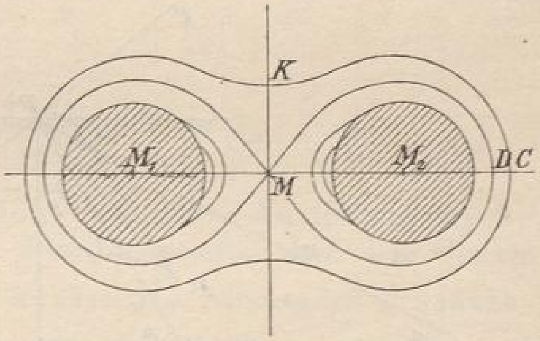
Fig. 61.



Handelt es sich um zwei sehr nahe beieinander liegende Niveaulinien, und ist an irgend einer Stelle der kürzeste Abstand gleich w, die Arbeit aber, die nötig ist, von der einen zur anderen überzuführen, gleich A, so ist $pw = A$, also $p = \frac{A}{w}$. Auch auf diese Weise kann man den Mittelwert der Anziehungskraft zwischen den Nachbarkurven finden, wobei sich wiederum ergiebt, daſs die Kräfte umgekehrt proportional den Kurvenabständen sind.

85) Eine mechanische Veranschaulichung. Mit Hilfe einfacher mechanischer Anschauungen lassen sich diese Dinge bequem aufklären Denkt man sich statt der Punkte M_1 und M_2 zwei homogene, kugelförmige Weltkörper gleicher Masse, deren gegenseitige Anziehung durch eine starre Verbindung unwirksam gemacht ist, und belegt man beide mit ozeanischen Wassermassen, so ordnet sich unter der Voraussetzung, daſs die Wasserteilchen aufeinander keine Anziehung ausüben, das Wasser nach den besprochenen Niveauflächen an. Ist die Wassermenge gering, so hat man nur zwei Wasserberge auf den einander zugewendeten Teilen der Kugeloberfläche. In einem bestimmten Falle berühren sich die beiden Ozeane im Schnittpunkte der Achse. Ist noch mehr Wasser vorhanden, so umgiebt der Ozean nach Art der äuſseren Kurve beide Kugeln einheitlich. Nach dem Gesetze der kommunizierenden Röhren giebt die Wassersäule DC denselben Druck, wie die höhere Säule MK.

Fig. 62.



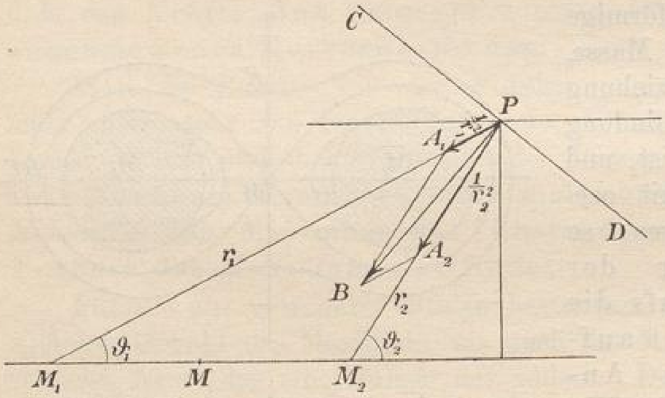
Man nehme z. B. den Zwischenfall, bei dem die Ozeane sich wie die beiden Teile eines Kegels in einer Spitze M berühren. Segelt ein Schiff von der Auſsenseite der einen Kugel aus nach dem Schnittpunkte der Koordinatenachsen hin, so nimmt sein „Gewicht“ allmählich ab und wird in jenem Schnittpunkte gleich Null. Dabei ist die Tiefe des Ozeans allmählich bis zu einem Höchstwerte gewachsen. Ein mitgenommenes Pendel, welches anfangs z. B. Sekundenschwingungen machte, würde langsamere und langsamere Schwingungen erhalten haben und sich schlieſslich ganz indifferent verhalten. Der Übergang zu den Schwingungen der Magnetnadel im magnetischen Felde und zu den Erscheinungen im entsprechenden elektrischen Felde macht jetzt keine Schwierigkeiten mehr.

Noch klarer wird die Darstellung, wenn man die Gröſse und Richtung der Kraftresultante für jede Stelle durch Konstruktion und

Rechnung bestimmt, was nach obigem zugleich die Normale und Tangente für jede Stelle jeder Niveaulinie giebt, so daſs elementare Behandlung der Kurven möglich ist. Dabei möge $m = 1$ gesetzt werden.

86) **Aufgabe.** P sei ein Punkt der Kurve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$, die Normale und die Tangente der Kurve sollen für P konstruiert und ihre Neigungen berechnet werden.

Fig. 63.



Auflösung. Man konstruiere nach obigem Verfahren

$$PA_1 = \frac{1}{r_1^2}$$

und

$$PA_2 = \frac{1}{r_2^2}$$

und setze beides nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen. Dies giebt p nach Gröſse und Richtung und mit letzterer die Normale. Das Lot auf dieser giebt die Tangentenrichtung in P.

Will man p durch Rechnung finden, so ergiebt es sich aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}.$$

Man kann auch mit Hilfe der wagerechten und senkrechten Seitenkräfte rechnen, was

$$-\xi = \frac{\cos\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\cos\vartheta_2}{r_2^2}, \quad -\eta = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\sin\vartheta_2}{r_2^2} \quad \text{und} \quad p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

giebt. Dadurch findet man zugleich die Tangente des Neigungswinkels α gegen die positive Richtung der X-Achse als

$$\tan\alpha = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\frac{\sin\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\sin\vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{\cos\vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\cos\vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{r_2^2\sin\vartheta_1 + r_1^2\sin\vartheta_2}{r_2^2\cos\vartheta_1 + r_2^2\cos\vartheta_2}.$$

Sind M_1 und M_2 nach ± 1 verlegt, so hat man

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3}}{\frac{x+1}{r_1^3} + \frac{x-1}{r_2^3}} = \frac{r_2^3 y + r_1^3 y}{r_2^3(x+1) + r_1^3(x-1)} = \frac{\sin^3\vartheta_1 + \sin^3\vartheta_2}{\sin^2\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \sin^2\vartheta_2\cos\vartheta_2}.$$

Die Tangentenrichtung β der Niveaulinie folgt aus $\tan\beta = -\frac{1}{\tan\alpha}$. [Dieselben Resultate erhält man durch implicites Differentiieren.]

87) Die Linien gleicher Intensität und gleicher Kraftrichtung.

Setzt man $p = c_1$, d. h.

$$\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2\cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2} = c_1^2,$$

so hat man die Gleichung der Linien gleicher Anziehungsstärke (gleicher Intensität). Jede derselben passiert nach dem Gesetze $\frac{p}{p_1} = \frac{w_1}{w}$ zugleich die Stellen konstanten Abstandes w benachbarter Niveaulinien, vorausgesetzt, dafs die Werte c des Potentials einer arithmetischen Reihe folgen, bei der die konstante Differenz sehr klein zu denken ist. Auf diesen Punkt kommt die Betrachtung später zurück.

Die Linien

$$\tan\alpha = \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{r_2^3 y + r_1^3 y}{r_2^3(x+1) + r_1^3(x-1)} = \gamma$$

sind Linien konstanter Anziehungsrichtung. Legt man also eine Schar paralleler Tangenten an die Schar der Niveaulinien, so erhält man diese Art von Kurven, deren Bedeutung gleichfalls noch einmal zur Sprache kommt.

Denkt man sich die Punkte M_1 und M_2 mit gleichen Mengen von positivem Magnetismus (bezw. Elektrizität) geladen, so würde eine kleine Magnetnadel sich überall in der Richtung der Resultante einstellen, wobei von dem störenden Erdmagnetismus jetzt abzusehen ist. Der eine Pol unterliegt nämlich der Wirkung der konstruierten Resultante, der andere einer entgegengesetzt zu zeichnenden Resultante. Es giebt eine Lage stabilen und eine Lage labilen Gleichgewichts.

Denkt man sich die Nadel senkrecht gegen die Resultante gestellt, so ist das statische Moment des wirkenden Kräftepaares (ein solches wirkt bei sehr kleiner Nadel, da dann die beiden Resultanten gleich und parallel, aber entgegengesetzt sind) ein Maximum. Die Nadel hat in Bezug auf ihren Drehungspunkt ein bestimmtes Trägheitsmoment. Die Schwingungsdauer der Nadel ist (kleine Schwingungen vorausgesetzt)

$$t = \pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{größtes statisches Moment}}} = \pi \sqrt{\frac{T}{M}},$$

was dem Gesetze $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für das mathematische Pendel, dem Gesetze $t = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}}$ für das physische Pendel entspricht.

Die Normalen der Niveaulinien geben also die Stellung der Nadel an, die Kurven $\tan \alpha = \gamma$ verbinden die Stellen gleicher Nadelrichtung, die Kurven $p = c$ dagegen verbinden die Stellen gleichen Maximalmoments, d. h. die Stellen gleicher Intensität und gleicher Schwingungsdauer miteinander. (Ein Magnetstab von der Länge l habe Pole von der Ladung $\pm m$, dann nennt man ml das magnetische Moment des Stabes. Schwingt er horizontal im homogenen Felde, z. B. in dem des Erdmagnetismus, so ist bei der Feldstärke F das gröfste Drehmoment gleich Fml, also die Schwingungsdauer $t = \pi \sqrt{\frac{T}{Fml}}$.)

So erhält man einen vorläufigen Einblick in die Gesetze des zusammengesetzten magnetischen und elektrischen Feldes. An die bekannten Versuche mit Eisenfeilspänen braucht nur erinnert zu werden. Jedes Teilchen wird polarisiert und ordnet sich so ein, dafs die gröfste Länge in die Kraftlinie fällt. Durch leises Schütteln entsteht in den Kraftlinien gewissermafsen eine Kette kleiner Magnete. Das Nötige darüber findet man in den Lehrbüchern der Physik.

88) Konstruktion und Gleichung der Kraftlinien für das symmetrische Zweipunktsystem.

Bezeichnet man die Kurven, welche das System der Niveaulinien senkrecht durchsetzen, als die Kraftlinien des Problems, weil sie für jede Stelle die Richtung der Resultante (vergl. Stellung der Magnetnadel) angeben, so ist diese Definition praktisch ohne weiteres klar.

Nach obigem erhielt man die Niveaukurven des Problems durch die Diagonalkurven der potentiell gleichwertigen Niveauringe der beiden Einzelprobleme. Es steht zu vermuten, dafs die Kraftlinien des Problems sich aus den Diagonalkurven der von den potentiell gleichwertigen Kraftlinien der Einzelprobleme gebildeten Vierecke ergeben. Diese in der Regel für hinreichend gehaltene Vermutung bedarf des Beweises, der erst weiter unten gegeben werden soll.

Nach Nr. 56 erhält man die gleichwertigen Strahlen des Einpunkt-Problems mit Hilfe der Gleichung

$$\cos \vartheta_1 = c_1,$$

indem man c die Werte einer arithmetischen Reihe, z. B.

$$0, \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{2}{n}, \pm \frac{3}{n}, \pm \frac{4}{n}, \ldots$$

annehmen läfst, was in Figur 43 dargestellt war. Dies gelte für den Punkt M_1. Ebenso mache man es mit dem Punkte M_2 und der Gleichung

$$\cos \vartheta_2 = c_2.$$

Läfst man nun schrittweise in dem ersten Strahlenbüschel $\cos \vartheta_1$ um je $\frac{1}{n}$ abnehmen, im andern $\cos \vartheta_2$ um denselben Wert zunehmen, so bleibt die Summe

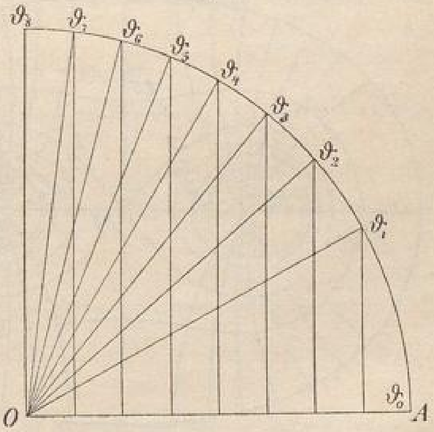
$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c_1 + c_2 = c$$

eine konstante Gröfse, und dem entsprechen die Diagonalkurven der Vierecke, die durch die beiden Strahlenbüschel bestimmt werden. Die Gleichung dieser Diagonalkurven ist also

$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c$$

und es steht zu vermuten, dafs diese zugleich die Kraftlinien des Problems sind. In Fig. 65 und 70 sind beide Arten von Diagonalkurven dargestellt. Fig. 64 giebt einen der Quadranten für jeden der Punkte M_1 und M_2 mit dem zugehörigen Strahlenbüschel an. Man vollende die Zeichnung und ziehe die Diagonalkurven der entstehenden Vierecke, um das Gesuchte mit beliebiger Genauigkeit zu erhalten.

Fig. 64.



Die Konstruktion mit Hilfe der beiden Strahlenbüschel reicht aus. Man kann aber auch folgendermafsen verfahren.

In Fig. 60 sei $A_1 A_2 = c$ (jedoch < 2). Legt man den Teilpunkt P beliebig, nur mit der Einschränkung, dafs jeder Teil < 1 ist, so läfst sich wie früher $A_1 P$ und $A_2 P$ als OB_1 und OB_2 in den Einheitskreis eintragen, jedoch dort als Cosinuslinie für die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 auffassen, die durch Verbindung der Lotpunkte C_1 und C_2 mit O entstehen. Durch die festen Punkte M_1 und M_2 lege man Parallele zu OC_1 und OC_2. Ihr Schnittpunkt giebt einen Punkt der Kurve

$$\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c.$$

Mit Hilfe beliebiger anderer Teilpunkte P erhält man weitere Punkte derselben Kurve.

Die Gleichung der neuen Kurvengruppe läfst sich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{y}{r_1} + \frac{y}{r_2} = c$$

oder

$$y = \frac{c r_1 r_2}{r_1 + r_2},$$

d. h., wenn die Massenpunkte in die Punkte ± 1 der X-Achse verlegt werden

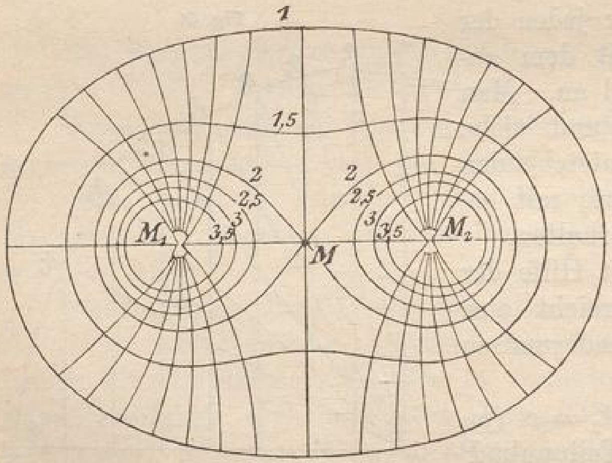
$$y = c \cdot \frac{\sqrt{[(x+1)^2 + y^2]\cdot[(x-1)^2 + y^2]}}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

oder

$$\frac{y}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} - c = 0.$$

In Figur 65 sind die Kurven im Verein mit den Niveaulinien dargestellt.

Fig. 65.



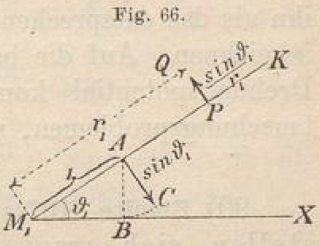
Kann nun nachgewiesen werden, dafs diese Kurven die Orthogonalkurven der Niveaulinien sind, so ist der Beweis dafür geliefert, dafs sie in der That die Kraftlinien darstellen. Geometrisch ist dies auf elementarem Wege nur umständlich zu zeigen. Um zum Ziele zu kommen, ziehe man die folgenden mechanischen Hilfsaufgaben heran, die auch aus anderen Gründen von Interesse sind.

89) Mechanische Hilfsaufgabe und das Drehungspotential.

Der durch M_1 gehende Vektor M_1K soll aus der Lage der positiven X-Achse nach der Richtung der positiven Y-Achse hin gedreht werden, jedoch soll dabei ein Widerstand überwunden werden, dessen Moment für jede Lage ϑ des Vektors den Wert $\sin\vartheta_1$ hat. Die zum Drehen nötige Arbeit soll berechnet und graphisch dargestellt werden.

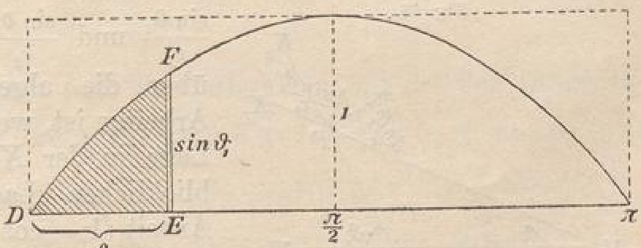
Auflösung. In Figur 66 sei M_1K der Vektor in der Lage ϑ_1 und $M_1A = 1$, so dafs $AB = \sin\vartheta_1 = AC$ ist. Die senkrecht gegen M_1K gerichtete Kraft $AC = \sin\vartheta_1$ hat in Bezug auf den Drehungspunkt M_1 das statische Moment $1 \cdot \sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_1$. Unten wird die zur Überwindung desselben nötige Kraft $PQ = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ für die beliebige Entfernung $M_1P = r_1$ gebraucht. Ihre Konstruktion ergiebt sich aus dem Hebelgesetz $r_1 : 1 = AC : PQ$. Die Arbeit wird durch die Hebelumsetzung nicht geändert, ist also für jeden Radius r_1 dieselbe.

Fig. 66.



Man erhält ihre graphische Darstellung, indem man die Peripherie des Einheits-Halbkreises gestreckt als Gerade zeichnet und für jeden Abstand $DE = \vartheta_1$ das Lot $EF = \sin\vartheta_1$ errichtet. Die Trapezfläche zwischen zwei Nachbarloten stellt dann die für ihren Abstand nötige Arbeit dar. Die Arbeit, die zur Drehung um den Bogen $\vartheta_1 = DE$ nötig ist, wird also durch die Fläche DEF dargestellt. Die gezeichnete Kurve ist bekanntlich eine Sinuskurve. Sowohl stereometrisch (schräger Cylinderschnitt) als auch durch Reihenberechnung läfst sich elementar zeigen, dafs die Fläche $DEF = \cos 0 - \cos\vartheta_1 = 1 - \cos\vartheta_1$ ist. Vgl. Method. Lehrbuch III. Denselben Wert hat also die zu berechnende Arbeit. Der Weg von P ist dabei vollständig gleichgültig. Um aus einer Lage ϑ_1' in eine Lage ϑ_1 zu gelangen, ist die Arbeit $(1 - \cos\vartheta_1) - (1 - \cos\vartheta_1') = \cos\vartheta_1' - \cos\vartheta_1$ nötig. Ist $\vartheta_1' = 90^0$, so ist die nötige Arbeit gleich $\cos\vartheta_1$. Sie ist negativ oder positiv, je nachdem die Bewegung des Vektors eine

Fig. 67.



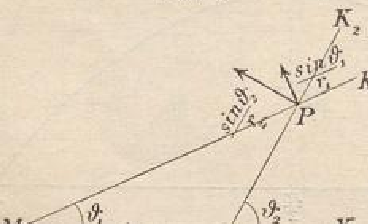
links- oder rechtsdrehende ist. Dabei ist der Widerstand als aktive Kraft zu betrachten. Jeder Vektor ist als eine Niveaulinie des Problems anzusehen, denn die Bewegung auf ihm selbst erfordert die Arbeit Null. Die Kraftlinien sind überall senkrecht gegen die Radien gerichtet, also Kreise. Im Verhältnis zum Newtonschen Anziehungsprobleme sind demnach die Kraftlinien und die Niveaulinien vertauscht worden.

Es findet nun folgende Analogie mit dem gewöhnlichen Potentialprobleme statt. Dort war $\frac{1}{r^2}$ die Anziehung oder der Widerstand, $\frac{1}{r}$ das Potential, d. h. die Arbeit, die dazu nötig ist, die Masseneinheit aus der Entfernung r in unendlich grofse Entfernung zu versetzen. Hier dagegen ist das Moment des Widerstandes gleich $\sin\vartheta$, die Arbeit aber, die nötig ist, den Vektor aus der Lage ϑ in die Lage 90^0 zu versetzen, ist gleich $\cos\vartheta$. Dieser Ausdruck steht also zu $\sin\vartheta$ in derselben Beziehung, wie $\frac{1}{r}$ zu $\frac{1}{r^2}$, man kann ihn als das entsprechende Potential, z. B. als das Drehungspotential bezeichnen. Auf die bedeutungsvolle Analogie zwischen Potential und Drehungspotential kommen wir unten, bei den sogenannten Vertauschungsproblemen, noch einmal zurück.

90) **Zweite Hilfsaufgabe.** Der Bewegung eines Punktes P stellen sich zwei Widerstandsmomente $\sin\vartheta_1$ und $\sin\vartheta_2$ entgegen, die sich auf Vektoren r_1 und r_2 beziehen, die um die festen Punkte M_1 und M_2 der X-Achse drehbar sind. Die zur Bewegung nötige Arbeit soll für beliebige Wege von P bestimmt werden.

Auflösung. Ist $M_1P = r_1$, und $MP = r_2$, so sind die zu überwindenden Kräfte senkrecht gegen die Vektoren angebracht zu denken und ihre Gröfsen sind $\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ und $\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}$. Nach dem Satze über die algebraische Addition der Arbeiten ist, wenn P aus irgend welcher Lage in der X-Achse nach der augenblicklichen Lage gelangen soll, die Arbeit $(1 - \cos\vartheta_1) + (1 - \cos\vartheta_2) = 2 - (\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)$ nötig. Um aus einer Lage ϑ_1', ϑ_2' in eine Lage ϑ_1, ϑ_2 zu gelangen, bedarf es der Arbeit $(2 - \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2) - (2 - \cos\vartheta_1' - \cos\vartheta_2') = (\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2') - (\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)$. Für die Lage in der Mittelsenkrechten ist $\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2' = 0$, um also von dort

Fig. 68.



nach der Lage ϑ_1, ϑ_2 zu gelangen, ist die Arbeit $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2$ nötig.

Ist für zwei verschiedene Lagen die Summe der Cosinus dieselbe, so ist zur Bewegung von der einen zur andern die Arbeit Null nötig. Folglich: Die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ sind die Niveaulinien dieses Problems.

Damit haben die oben konstruierten Kurven eine bestimmte Deutung erhalten, die eigentlich beabsichtigte ergiebt sich aber aus folgender Aufgabe.

91) **Aufgabe.** Die Richtungen der Normalen und Tangenten für die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ zu bestimmen.

Auflösung. Um die Normale zu bestimmen, setze man die in P angreifenden Kräfte $\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ und $\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}$ nach dem Parallelogramm zusammen. Da uns jetzt nur die Richtung interessiert, gehe man von ihren Komponenten

$$\xi_1 = -\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}\sin\vartheta_1, \quad \eta_1 = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1}\cos\vartheta_1$$

$$\xi_2 = -\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}\sin\vartheta_2, \quad \eta_2 = \frac{\sin\vartheta_2}{r_2}\cos\vartheta_2$$

aus. (Dies giebt $p = \sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2}$.) Sind nun z. B. M_1 und M_2 die Punkte ± 1, so bestimmt sich die Richtung aus

$$\tan\gamma = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\xi_1 + \xi_2} = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2}{-\frac{1}{r_1}\sin^2\vartheta_1 - \frac{1}{r_2}\sin^2\vartheta_2} = -\frac{\frac{y(x+1)}{r_1^3} + \frac{y(x-1)}{r_2^3}}{\frac{y^2}{r_1^3} + \frac{y^2}{r_2^3}}$$

oder

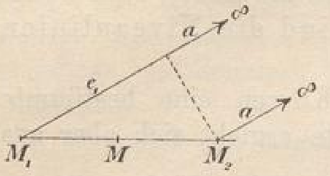
$$\tan\gamma = -\frac{\frac{x+1}{r_1^3} + \frac{x-1}{r_3^2}}{\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3}} = -\frac{1}{\tan\alpha} = \tan\beta.$$

Die Richtung der Normalen fällt also zusammen mit der der Tangente der Kurven $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$. Folglich: Die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 - c$ sind die Orthogonalkurven der Niveaulinien $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$, d. h. sie sind die Kraftlinien des symmetrischen Zweipunktsystems.*)

*) Einen andern Beweisgang findet man in der während des Druckes erschienenen zweiten Auflage von Börner, Lehrbuch der Physik für Realgymn. etc. auf Seite 376.

92) **Bemerkung** über die Asymptoten der Kraftlinien. Sind die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 einander gleich, so fällt der Schnittpunkt der Vektoren in unendliche Entfernung. Da beide Vektoren gleichberechtigt sind, ist er auf der Mittellinie des Parallelstreifens zu suchen. Diese durch M gehende Gerade ist die Asymptote der betreffenden Kraftlinie. Dies stimmt damit überein, dafs die Niveaulinien für gröfser werdende Entfernung und kleiner werdenden Potentialwert allmählich Kreisgestalt annehmen. Da Symmetrie gegen die Koordinatenachsen stattfindet, mufs M Mittelpunkt der unendlich grofsen Kreise sein.

Fig. 69.



Für die Asymptote jeder Kraftlinie ist $\cos\vartheta + \cos\vartheta = c$, also $\cos\vartheta = \frac{c}{2}$. Läfst man c Werte annehmen, die einer arithmetischen Reihe folgen, so nimmt auch $\frac{c}{2}$ solche an. Die Asymptoten teilen also die Ebene ebenso ein, wie vorher die von jedem der Massenpunkte ausgehenden Radien, nur ist die Anzahl der Kraftröhren die doppelte. Läfst man nun das System der Niveau- und Kraftlinien um die X-Achse rotieren, so geben die Asymptoten, also auch die Kraftlinien auf der unendlich grofsen Kugelfläche Flächen gleicher Zonen. Führt man also durch die X-Achse Normalschnitte, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, so wird die unendliche Kugelfläche in flächengleiche Rechtecke eingeteilt.

Von M_1 und M_2 gehen nach dort die von Faraday und Maxwell eingeführten Kraftröhren rechteckigen Querschnittes. Der ganze Raum ist in rechtwinklige Zellen eingeteilt, die potentiell gleichwertig sind. In den neueren Lehrbüchern der Physik ist dies auf Grund experimenteller Anschauungen dargestellt. Das Obige aber giebt eine theoretische Ableitung dieser Dinge in rein elementarer Darstellung.

Die Hauptsache ist, dafs die Einteilung der unendlich grofsen Kugel in flächengleiche Felder ganz dieselbe ist, wie bei dem Einpunktproblem, also ebenso, als ob die Masse 2 im Punkte M koncentriert wäre. Diese Bedeutung des Schwerpunktes M wird bei den allgemeinen Problemen in noch höherem Grade zur Geltung kommen.

Ebenso, wie bei den Niveaulinien, kann man auch hier die Diagonalkurven als den Ausdruck der Addition der beiden Drehungspotentiale betrachten, so dafs sie der Gleichung $V = V_1 + V_2 = c$ genügen. Die betreffenden Betrachtungen lassen sich wörtlich wiederholen.

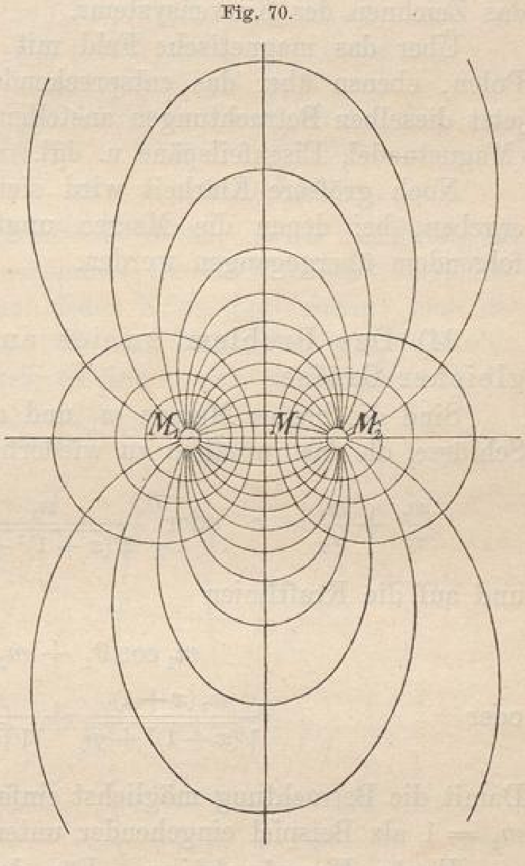
93) Der Fall gleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten.

Man denke sich die Punkte ± 1 der X-Achse mit Elektrizitätsmengen ± 1 geladen, wobei das Vorzeichen die Ungleichartigkeit bedeuten soll. Dann wird der mit -1 geladene freie Punkt von M_1 mit der Kraft $\frac{1}{r_1^2}$ angezogen, von M_2 mit $\frac{1}{r_2^2}$ abgestofsen. Die Einzelpotentiale sind $\frac{1}{r_1}$ und $-\frac{1}{r_2}$. Nach denselben Schlüssen wie vorher erhalten die Gleichungen der Niveau- und Kraftflächen die Formen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c \\ \text{oder} \\ \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \\ \quad - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \end{array}\right\} \quad (5),$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = c \\ \text{oder} \\ \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} \\ \quad - \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \end{array}\right\} \quad (6).$$

Fig. 70.



Die Konstruktion geschieht entweder mit Hilfe der anderen Gruppen von Diagonalkurven der Einzelsysteme, oder, der zweiten Methode entsprechend, mit Hilfe einer Linie $A_1 A_2$, nur ist der Teilpunkt P aufserhalb zu wählen. Die zweifache Symmetrie ist selbstverständlich. Mit Ausnahme der beiden Symmetrieachsen verlaufen alle Kurven als geschlossene Ovale im Endlichen, so dafs von den eigentlichen Kurven keine eine Asymptote besitzt. Die Grenzfälle

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0, \quad \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = 0, \quad \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = 2$$

führen auf die Geraden des Netzes.

Nimmt in Gl. (5) c die Werte einer arithmetischen Reihe, z. B. 0, 1, 2, 3 ... an, während in Gl. (6) c Werten wie

$$0, \pm\frac{2}{n}, \pm\frac{4}{n}, \pm\frac{6}{n}, \cdots \pm\frac{2n}{n}$$

entspricht, so erhält man die Einteilung in gleichwertige Felder. In M_1 und M_2 ist für jede Kraftlinie $\cos\vartheta_1 - \cos(180^0 - \vartheta_1) = 2\cos\vartheta_1 = c$, also der Schnittwinkel dort aus $\cos\vartheta_1 = \frac{c}{2}$ und $\cos\vartheta_2 = -\frac{c}{2}$ zu bestimmen. Die Cosinus der Schnittwinkel in M_1 und M_2 folgen somit einer arithmetischen Reihe. Die Tangenten in diesen Punkten würden daher auf der unendlich grofsen Kugel, die hier keine Bedeutung hat, flächengleiche Zonen geben. Dies erleichtert das Zeichnen des Kurvensystems.

Über das magnetische Feld mit gleichen und entgegengesetzten Polen, ebenso über das entsprechende elektrische Feld, lassen sich jetzt dieselben Betrachtungen anstellen, wie bei dem vorigen Problem. (Magnetnadel, Eisenfeilspäne u. dgl.)

Noch gröfsere Klarheit wird sich bei der Behandlung der Fälle ergeben, bei denen die Massen ungleich sind. Zu diesen soll in folgendem übergegangen werden.

94) Das Problem zweier anziehender Massen von ungleicher Gröfse.

Sind die beiden Massen m_1 und m_2 ungleich, so führen dieselben Schlüsse, die fast wörtlich zu wiederholen sind, auf die Niveauflächen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c$$

und auf die Kraftlinien

$$\left.\begin{array}{r} m_1\cos\vartheta_1 + m_2\cos\vartheta_2 = c \\ \text{oder} \qquad \dfrac{m_1(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \dfrac{m_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \end{array}\right\}.$$

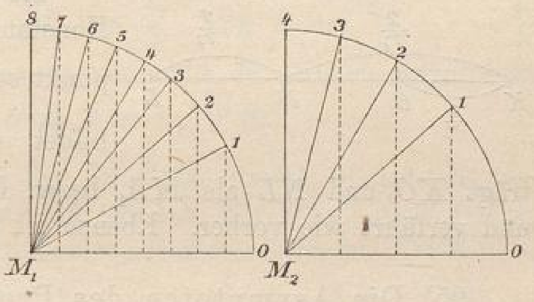
Damit die Betrachtung möglichst einfach werde, soll der Fall $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ als Beispiel eingehender untersucht werden.

Erste Konstruktion. Für den Punkt M_1 denke man sich zunächst die koncentrische Kreisschar $\frac{2}{r_1} = c_1$ so gezeichnet, dafs c z. B. der arithmetischen Reihe $0, d, 2d, 3d, \ldots$ folgt, für M_2 die Kreisschar $\frac{1}{r_2} = c_2$, wobei c_2 derselben arithmetischen Reihe folgt. Zieht man diejenige Gruppe von Diagonalkurven, die in der einen Kreisschar nach innen, in der andern nach aufsen geht, so heben sich von Punkt zu Punkt zwei entgegengesetzte Differenzen auf, und der Ausdruck

$\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ bleibt eine konstante Gröfse c, wie es in dem früher behandelten Falle gleicher Massen geschah. Dies giebt die Niveaulinien.

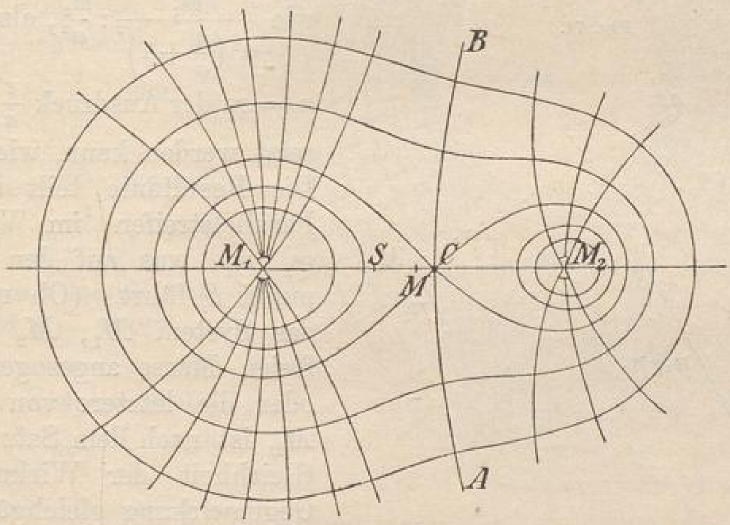
Die Schar M_1 enthält dieselben Kreise, wie die Schar M_2, aber aufserdem in jedem Ringe noch einen durch Interpolation gefundenen Kreis, im ganzen also die doppelte Zahl. Die Schar M_1 kann man sich also aus zwei Scharen bestehend denken, deren jede der Masse 1 entspricht, von denen aber die zweite mit einem anderen, durch Interpolation gefundenen Radius beginnt. Vgl. Fig. 11 und 12.

Fig. 71.



Ebenso verfahre man mit den Strahlenbüscheln. Bei M_1 folge $2 \cos \vartheta_1 = c_1$ einer arithmetischen Reihe, bei M_2 folge $\cos \vartheta_2 = c_2$ derselben arithmetischen Reihe. In der Zeichnung ist dies durch die Einteilung des horizontalen Radius in 8 bezw. 4 gleiche Teile erfolgt. Vervollständigt man jeden Kreis und zeichnet man die eine Gruppe von Diagonalkurven, die das eine Büschel geradläufig, das andere rückläufig durchkreuzt, so findet man die Kraftlinien.

Fig. 72.

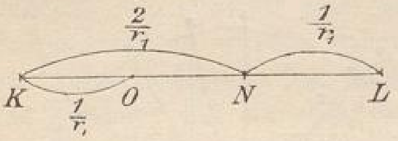


Durch Rotation um $M_1 M_2$ erhält man die Niveauflächen und Kraftflächen und durch Einführung von Meridianschnitten, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, die potentiell gleichwertige Zelleneinteilung des Raumes. In Fig. 72 ist das System skizziert.

Hätte es sich um $m_2 : m_1 = 3 : 1$ gehandelt, so hätte man bei M_1 die dreifache Anzahl von Kraftröhren wie bei M_2 erhalten. Allgemein handelt es sich um das Verhältnis $m_2 : m_1$ bei den Massen wie bei den Kraftröhren. Damit ist eine der wichtigsten von Faradays Behauptungen bewiesen.

Zweite Konstruktionsmethode. Man verfahre ähnlich, wie in Nr. 82.

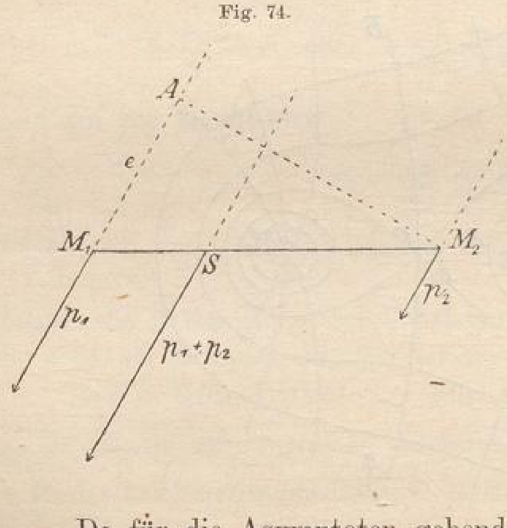
Fig. 73.



Ist $KL = c$, Fig. 73, die gewählte Konstante und N ein beliebiger Teilpunkt, so setzt man $KN = \frac{2}{r_1}$, $NL = \frac{1}{r_2}$, bildet durch Halbierung $KO = \frac{1}{r_1}$, trägt KO und NL als MA_1 bezw. MA_2 in den Einheitskreis ein und verfährt wie vorher. Ebenso ist es bei den Kraftlinien.

95) Die Asymptoten des Problems. Jede der Kraftlinien hat eine Asymptote, die nach dem im Unendlichen liegenden Schnittpunkte je zweier paralleler Strahlen hin gerichtet ist. Es wird behauptet, jede der Asymptoten gehe durch den Schwerpunkt S der Massen M_1 und M_2, der im Beispiele die Gerade $M_1 M_2$ im Verhältnis $1:2$ teilt. Für unendliche Entfernung $a = \infty$ sind nämlich die Kräfte parallel und verhalten sich nach Fig. 74 wie $\frac{m_1}{(e+a)^2} : \frac{m_2}{a^2}$ oder

Fig. 74.

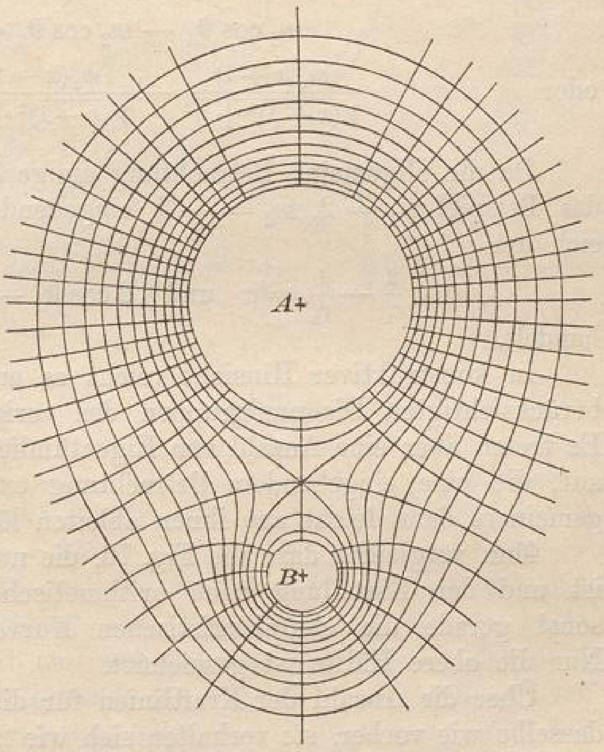


wie $\frac{m_1}{a^2\left(\frac{e}{a}+1\right)^2} : \frac{m_2}{a^2}$, also, da für $a = \infty$ der Ausdruck $\frac{e}{a} = o$ gesetzt werden kann, wie $m_1 : m_2$. Die Resultante teilt also den Parallelstreifen im Verhältnis $m_2 : m_1$, was auf den Schwerpunkt S führt. (Ob man sich das System M_1, M_2 von der freien Masse angezogen denkt, oder die letztere von M_1 und M_2, ist nach dem Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung gleichgültig.)

Da für die Asymptoten gebenden Strahlen $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ ist, so folgt für den unendlichen Punkt jeder Kraftlinie eine Gleichung $2\cos\vartheta + \cos\vartheta = c$ oder $3\cos\vartheta = c$, also $\cos\vartheta = \frac{c}{3}\cdot$ Dies folgt ebenso, wie c einer arithmetischen Reihe. Die um S zu schlagende unendlich grofse Kugel, die der Asymptoten wegen zu den Niveauflächen gehört, wird also durch die aus den Kraftlinien durch Rotation um $M_1 M_2$ entstehenden Kraftflächen in gleiche Zonen eingeteilt, von denen $\frac{2}{3}$ dem Bereiche von M_1, $\frac{1}{3}$ dem von M_2 zufallen. (Im allgemeinen handelt es sich nicht um das Verhältnis $2:1$, sondern um $m_1 : m_2$.) Denkt man sich also um S einen Kreis geschlagen, und teilt man seinen horizontalen Durchmesser in 3 gleiche Teile ein, so giebt das Lot in dem von M_1 um $\frac{2r}{3}$, von S um $\frac{2r}{3} - r = \frac{r}{3}$ entfernten Teilpunkte den Kreispunkt, nach dem die teilende Asymptote gerichtet ist. Aus $\cos\vartheta = \frac{1}{3}$ folgt $\vartheta = \sim 70^0\,32'$.

96) **Bemerkungen.** Ist in Fig. 72 C der Punkt, in dem die zugehörige Kraftlinie die X-Achse trifft, so dafs $M_1 C B \infty$ und $M_2 C B \infty$ die beiden ausgezeichneten und teilweise zusammenfallenden Kraftlinien sind, so treffen sich in C zugleich die beiden zugespitzten Ovale der Niveaulinien, durch welche die zweiteiligen und die einheitlichen Niveaulinien voneinander geschieden werden. Es handelt sich um die Gleichgewichtsstelle, die durch $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{r_2^2}$ oder $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{(M_1 M_2 - r_1)^2}$ oder endlich $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{(2 - r_1)^2}$ sich so bestimmt, dafs $M_1 C = 1{,}172$, $M_2 C = 0{,}828$ ist.

Fig. 75.



Da man für jede Stelle die Resultante der Kräfte $\frac{2}{r_1^2}$ und $\frac{1}{r_1^2}$ nach Gröfse p und Richtung α leicht berechnen und konstruieren kann, was ganz ebenso wie früher geschieht, so sind auch die Normalen und Tangenten der beiden Kurvenscharen leicht zu berechnen und zu konstruieren. Die Kurven $p = c$ sind die Kurven gleicher Intensität, die Kurven $\tan\alpha = c$ solche gleicher Kraftrichtung.

Über diese Kurven und über das Verhalten der Magnetnadel im magnetischen Felde, über das betreffende elektrische Feld, über die Ozeane bei kugelförmigen Weltkörpern vom Massenverhältnis 2 : 1, die starr miteinander verbunden sind, stelle man dieselben Betrachtungen an, wie vorher.

Fig. 75 stellt den Fall der Ladungen $A = 20$, $B = 5$ nach einer Maxwellschen Zeichnung dar. Die Zahlen bedeuten jedesmal die Anzahl der durch Umdrehung der Figur entstehenden Zonen, die also halb so grofs ist, wie die der gezeichneten Sektoren.

97) Der Fall ungleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten in zwei festen Punkten.

Die früheren Schlüsse führen bei entsprechender Anordnung auf Gleichungen:

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = c \text{ oder } \frac{m_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \qquad (7),$$

oder

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cos\vartheta_1 - m_2 \cos\vartheta_2 = c \\ \frac{m_1(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{m_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \end{aligned}\right\} \qquad (8).$$

Da die allgemeine Betrachtung einige Schwierigkeiten bietet, sei das Beispiel $m_1 = 2$, $m_2 = -1$ eingehender dargestellt, so dafs es sich um

$$\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c \quad \text{und} \quad 2\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = c$$

handelt.

In konstruktiver Hinsicht reicht es aus, die beiden noch nicht berücksichtigten Diagonalgruppen des vorigen Systems zu zeichnen. Es treten aber eine Anzahl von Eigentümlichkeiten bei diesen Kurven auf, die eine eingehendere Betrachtung erfordern, da sich das Allgemeinere dann leicht aus ihnen ableiten läfst.

Man vergleiche dazu die Fig. 76, die nur als Skizze zu betrachten ist und der Einteilung nach arithmetischer Reihe nicht folgt, da sonst gerade die charakteristischen Kurven hätten fehlen können. Nur die obere Hälfte ist gezeichnet.

Über die Anzahl der Kraftlinien für die Punkte M_1 und M_2 gilt dasselbe wie vorher, sie verhalten sich wie 2 : 1. Nur die Hälfte geht von M_1 nach M_2, die andere Hälfte geht ins Unendliche und diese hat Asymptoten.

Für die Asymptoten handelt es sich um parallele Strahlen der beiden Büschel, also um $\vartheta_1 = \vartheta_2$, so dafs für die unendlich fernen Punkte der Kraftlinien die Gleichung übergeht in

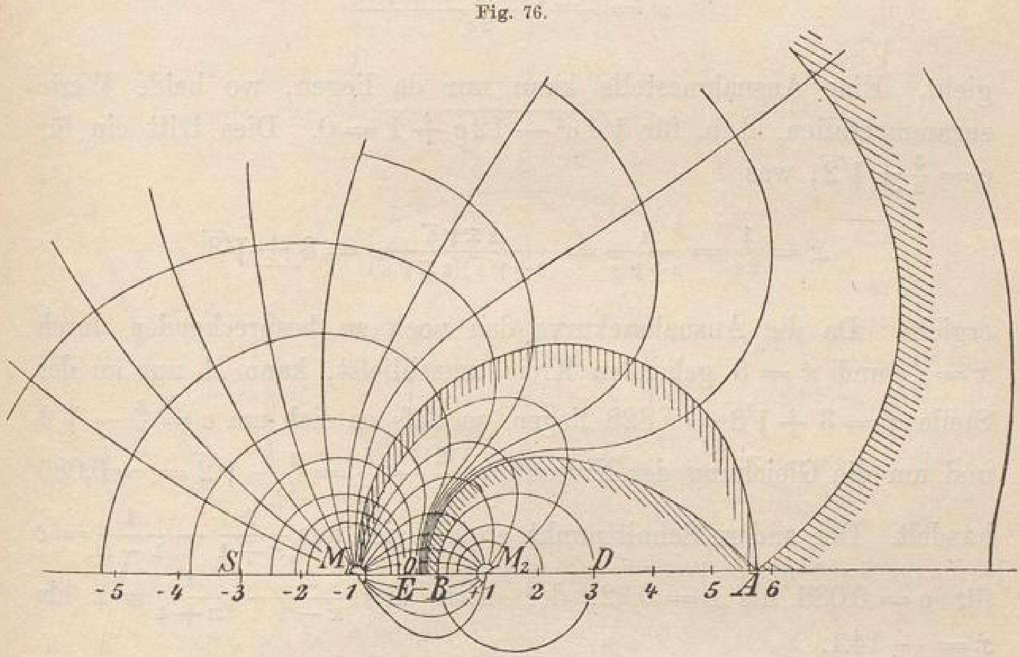
$$2 \cos \vartheta - \cos \vartheta = c$$

oder in

$$\cos \vartheta = c.$$

Diese Asymptoten gehen aus denselben Gründen, wie früher, durch den Schwerpunkt S, der aber aufserhalb $M_1 M_2$ liegt, weil in M_1 eine Masse oder Kraft 2, in M_2 eine entgegengesetzte Masse oder Kraft 1 zu denken ist. Dabei ist nach dem Hebelgesetze $SM_1 = \frac{1}{2} SM_2$.

Fig. 76.



Zu den Niveauflächen gehört eine unendlich grofse Kugel mit S als Mittelpunkt. Läfst man c die Werte einer arithmetischen Reihe 0, d, $2d$, $3d$, ... annehmen, so erhält man wie früher eine Einteilung dieser Kugel in flächengleiche Streifen, wie die potentiell gleichwertige Einteilung es erfordert.

Zwischen den nach M_2 und den nach dem Unendlichen gehenden Kraftlinien mufs, wie früher, eine liegen, die als Grenze beiden Gruppen zugleich angehört und sich dann spaltet. In der Zeichnung ist es die von M_1 nach A gehende Kurve, die bei M senkrecht aufsteigt, bei A senkrecht aufsetzt, sich dort spaltet und einen Arm nach ∞, den anderen nach M_2 schickt. In A trifft sie mit einer ausgezeichneten Niveaulinie zusammen, die ebenfalls die Grenzkurve zwischen zwei Gruppen von Niveaulinien ist. Die links davon gezeichneten Niveaulinien umschliefsen nur den Punkt M, die der andern Gruppe bestehen aus je zwei getrennten Ovalen, von denen das eine den Punkt M_2, das andere die beiden Punkte M_1 und M_2 zugleich umschliefst. Die Grenzkurve besteht aus zwei zugespitzten Ovalen, die sich in A mit den Spitzen berühren, nur ist die eine Spitze als konvex, die andere als konkav aufzufassen.

Besonders wünschenswert ist die Bestimmung von A. Für $y = 0$ geht $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c$ über in $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = c$, was

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{4c^2 - 12c + 1}}{2c}$$

giebt. Eine Ausnahmestelle kann nur da liegen, wo beide Werte zusammenfallen, d. h. für $\sqrt{4c^2 - 12c + 1} = 0$. Dies tritt ein für $c = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$, was

$$x = \frac{1}{2c} = \frac{1}{3 \pm \sqrt{8}} = \frac{3 \mp \sqrt{8}}{(3 \pm \sqrt{8})(3 \mp \sqrt{8})} = 3 \pm \sqrt{8}$$

ergiebt. Da die Ausnahmekurve den noch zu besprechenden durch $x = \frac{1}{3}$ und $x = 3$ gehenden Kreis umschliefst, kann A nur an der Stelle $x = 3 + \sqrt{8} = 5{,}828$ liegen, so dafs es sich um $c = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ und um die Gleichung der Niveaulinie $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \sim 0{,}086$ handelt. Der andere Schnittpunkt ergiebt sich aus $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{1-x} = c$ für $c = 0{,}086$ als $x = 0{,}32$, der dritte aus $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = c$ als $x = -14{,}1$.

Dafs zu den Niveaulinien ein Kreis gehört, folgt aus $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0$ für $c = 0$, d. h. aus $\frac{r_1}{r_2} = 2$. Es ist der Kreis, dessen Durchmesser BD durch die Punkte bestimmt wird, welche die Strecke $M_1 M_2$ innerlich und äufserlich im Verhältnis $2:1$ teilen, so dafs $M_1 B = \frac{2}{3} M_1 M_2$ und $M_1 D = \frac{3}{2} M_1 M_2$ ist. M_1, B, M_2 und D sind harmonische Punkte.

Da für die mit der X-Achse zusammenfallende Asymptote $\cos\vartheta = 1$ $(\vartheta = 0)$ ist, so ist $2\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = 1$ die Ausnahmekurve unter den Kraftlinien.

Über die Asymptoten und die Neigungen der Kraftlinien in M_1 und M_2 lassen sich noch Betrachtungen einfacher Art anstellen, auf die hier verzichtet werden soll.

Ist das Verhältnis der Ladungen von M_1 und M_2 allgemeiner $m_1 : (-m_2)$ und ist m_1 absolut gröfser als m_2, so gehen m_2 der von M_1 ausstrahlenden m_1 Kraftröhren nach M_2, der Rest $m_2 - m_1$ geht nach dem Unendlichen. Die zu den Niveauflächen gehörige unendlich grofse Kugel mit S als Centrum

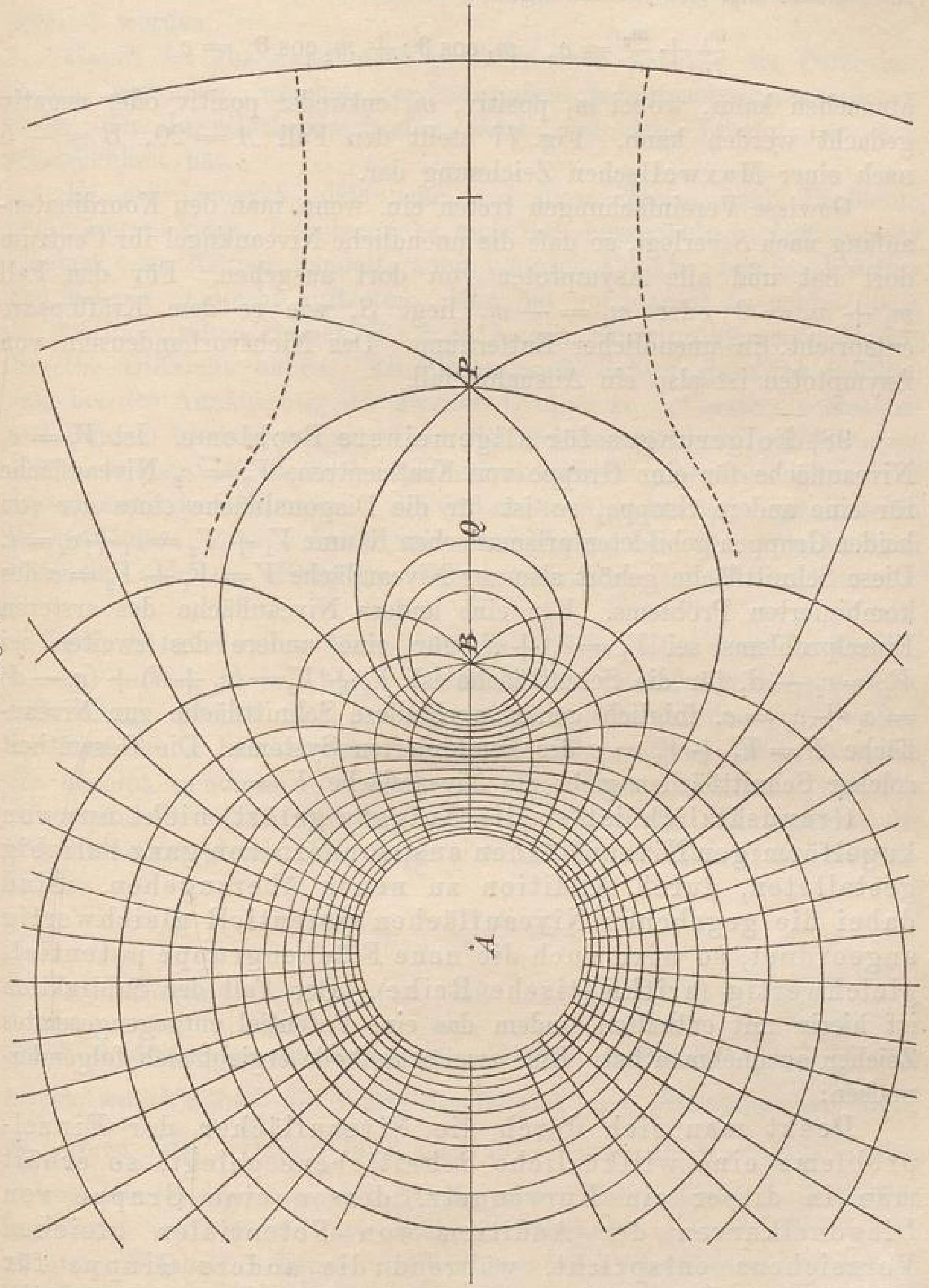


Fig. 77.

wird durch die Kraftflächen wiederum in flächengleiche Streifen eingeteilt, genau so, als ob in S als Gesamtmasse $m_1 - m_2$ angebracht wäre.

Die Analogie zwischen den Zweipunktproblemen für gleichartige und ungleichartige Ladungen wird demnach doch eine derartige, dafs man beide mit den Gleichungen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c, \quad m_1 \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2 = c$$

abmachen kann, wobei m_1 positiv, m_2 entweder positiv oder negativ gedacht werden kann. Fig. 77 stellt den Fall $A = 20$, $B = -5$ nach einer Maxwellschen Zeichnung dar.

Gewisse Vereinfachungen treten ein, wenn man den Koordinatenanfang nach S verlegt, so dafs die unendliche Niveaukugel ihr Centrum dort hat und alle Asymptoten von dort ausgehen. Für den Fall $m_1 + m_2 = 0$ oder $m_1 = -m_2$ liegt S, wie es dem Kräftepaare entspricht, in unendlicher Entfernung. Das Nichtvorhandensein von Asymptoten ist also ein Ausnahmefall.

98) Folgerungen für allgemeinere Probleme. Ist $V_1 = c_1$ Niveaufläche für eine Gruppe von Kraftcentren, $V_2 = c_2$ Niveaufläche für eine andere Gruppe, so ist für die Diagonalfläche eines der von beiden Gruppen gebildeten prismatischen Räume $V_1 + V_2 = c_1 + c_2 = c$. Diese Schnittfläche gehört also zur Niveaufläche $V = V_1 + V_2 = c$ des kombinierten Problems. Für eine andere Niveaufläche des ersteren Einzelproblems sei $V_1 = c_1 + d$, für eine andere des zweiten sei $V_2 = c_2 - d$, für die Schnittfläche ist $V_1 + V_2 = (c_1 + d) + (c_2 - d) = c_1 + c_2 = c$, folglich gehört auch diese Schnittfläche zur Niveaufläche $V = V_1 + V_2 = c$ des kombinierten Systems. Die Gesamtheit solcher Schnittflächen giebt die Niveaufläche $V = c$.

Grundsätzlich ist so die Aufgabe gelöst, nicht nur von kugelförmigen Niveauflächen aus, sondern von ganz beliebig gestalteten, durch Addition zu neuen überzugehen. Sind dabei die gegebenen Niveauflächen potentiell gleichwertig angeordnet, so wird auch die neue Flächengruppe potentiell gleichwertig (arithmetische Reihe). Der Fall der Subtraktion ist hierin mit enthalten, indem das eine Potential entgegengesetztes Zeichen anzunehmen hat. Eine zweite Methode ergiebt sich folgendermafsen:

Denkt man sich durch die Niveauflächen der Einzelprobleme eine willkürliche Schnittebene gelegt, so erhält man in dieser ein Kurvennetz, dessen eine Gruppe von Diagonalkurven der Addition von Potentialen gleichen Vorzeichens entspricht, während die andere Gruppe für Addition von Potentialen entgegengesetzten Vorzeichens gilt.

An den kugelförmigen Niveauflächen kann man sich diese Sätze klar machen, um sie dann auf ganz allgemein gestaltete zu übertragen. Orthogonal gehen durch die Schar der neuen Niveauflächen die Kraftlinien. Die Kraftröhren des kombinierten Problems können aus denen der Einzelprobleme ebenfalls durch Diagonalschnitte abgeleitet werden.

Damit ist ein Fundament geometrischer Art für die Potentialtheorie gefunden, welches gewissermafsen Infinitesimalgeometrie an Stelle der Infinitesimalrechnung setzt und den Vorzug der Anschaulichkeit hat.

Es sei bemerkt, dafs man auf diese Weise auch Probleme kombinieren kann, bei denen es sich um massenbelegte Linien oder Flächen oder Körper handelt, auch könnten Punkte, Linien, Flächen und Körper gemischt auftreten. Man hat nur darauf zu achten, dafs die arithmetischen Reihen für c in beiden Einzelproblemen jedesmal dieselbe Differenz haben. Allerdings mufs darauf geachtet werden, dafs bei der Annäherung der zweiten Gruppe an die erste die Massenverteilungen bleiben, wie sie sind. Bei elektrostatischen Problemen ist dies nicht der Fall, denn die Influenzwirkungen geben eine ganz neue Anordnung. Erst wenn man die der neuen Anordnung entsprechenden Niveauflächen kennt, kann man aus ihnen die des kombinierten Problems ableiten. Beispiele werden unten zur Darstellung kommen.

99) Allgemeines Mehrpunktproblem. Hat man die Massen m_1, m_2 und m_3 in beliebigen Raumpunkten, wobei sämtliche positiv, oder einige positiv und der Rest negativ sein können [wir wollen der Einfachheit halber stets die Summe der positiven als gröfser, als die absolut genommene Summe der negativen annehmen (was der Allgemeinheit nicht schadet), oder im Grenzfalle die algebraische Gesamtsumme gleich Null setzen], so ist die Gleichung der Niveauflächen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} = c.$$

Die Konstruktion geschieht so, dafs man aus $\frac{m_1}{r_1} = c_1$ und $\frac{m_2}{r_2} = c_2$ durch Addition im obigen Sinne zunächst die Flächen $\frac{m_1}{r_2} + \frac{m_2}{r_2} = k$ bildet, wobei man k die Werte der Glieder einer arithmetischen Reihe annehmen läfst. Darauf läfst man in $\frac{m_3}{r_3} = c_3$ die Konstante c_3 dieselben Werte oder die der Glieder einer Reihe derselben Differenz annehmen und findet nach vorigem Abschnitt geometrisch die gesuchten Flächen. Diese werden von den Kraftlinien senkrecht durchsetzt.

Ist die Summe der Massen verschieden von Null, dann giebt es im Endlichen einen Schwerpunkt S. Zu den Niveauflächen gehört dann eine unendlich grofse Kugel mit S als Centrum. Sämtliche oder ein Teil der Kraftlinien gehen bis zu dieser Kugel, je nachdem alle Massen positiv, oder diese teils positiv, teils negativ sind. Die Asymptoten gehen von S aus. Teilt man diese Kugel irgendwie in gleiche Flächen ein, so geben die in ihren Rändern endenden Kraftlinien potentiell gleichwertige Kraftröhren. Dadurch wird in dem Falle lauter positiver Massen der Gesamtraum gleichwertig eingeteilt, im Falle gemischter Vorzeichen wenigstens ein Teil des Raumes.

Ist die Summe der Massen gleich Null, so liegt S in unendlich grofser Entfernung, zu den Niveauflächen gehört dann im allgemeinen keine unendlich grofse Kugel und ebensowenig sind Asymptoten vorhanden.

Die besprochene Einteilung der unendlich grofsen Kugel in gleiche Flächen kann durch Meridiane und Parallelkreise in bekannter Weise erfolgen, da man aber die Pole auf der Kugel beliebig wählen kann (nur müssen sie einander entgegengesetzt sein), so sieht man, dafs man unendliche Mannigfaltigkeit in der Einteilung des Raums erhalten kann. Am einfachsten wird es allerdings sein, sich gewissen Koordinatensystemen anzubequemen, wobei die Gleichungen die einfachste Gestalt annehmen.

100) Anordnung auf gerader Linie. Die einfachsten Fälle erhält man bei der Anordnung sämtlicher Massen auf gerader Linie, weil dann die Niveauflächen Drehungsflächen werden. Die Gleichungen des Problems sind dann für die Niveauflächen

$$1)\qquad \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots + \frac{m_n}{r_n} = c,$$

für die Kraftlinien in jeder Meridianebene

$$2)\qquad m_1 \cos\vartheta_1 + m_2 \cos\vartheta_2 + \cdots + m_n \cos\vartheta_n = c_1,$$

Meridianschnitte, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, besorgen das übrige, während sowohl c als auch c_1 arithmetischen Reihen zu folgen haben.

Handelt es sich z. B. um Punkte M_1, M_2, M_3 auf gerader Linie mit Ladungen -3, $+2$, $+1$ (so dafs die Summe Null ist, was die asymptotische Gruppe entfernt und das Skizzieren erleichtert), so bestehen die Gleichungen:

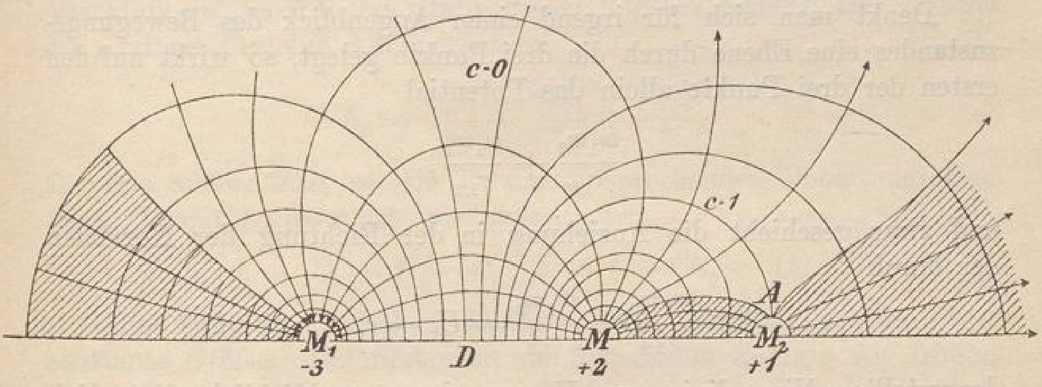
$$-\frac{3}{r_1} + \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_3} = c$$

$$-3\cos\vartheta_1 + 2\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_3 = c.$$

In Fig. 78 ist das Feld in seiner Gestaltung skizziert. Man verfolge den Gang der Pfeile und der Niveaukurven. Die Schraffierung zeigt an, daſs ein Teil der von M_2 ausgehenden Stromlinien nicht unmittelbar nach M_1 gelangen kann, sondern nach M_3 geht, daſs dagegen von M_3 aus auf sehr groſsem Wege der Übergang nach M_1 erfolgt. Mit Ausnahme der X-Achse und einer Niveaulinie DE zwischen M_1 und M_3 gelangt keine der Kurven in den unendlichen Bereich.

Entsprechendes geschieht bei beliebig vielen Punkten auf gerader Linie. Dreht man um die X-Achse und führt Meridianschnitte, so erhält man die Zelleneinteilung des elektrostatischen Feldes für jeden der einzelnen Fälle.

Fig. 78.



Die Hauptsache ist, daſs die Anzahl der Kraftlinien für die einzelnen Punkte proportional den elektrischen Massen ist, daſs, wenn die Summe der elektrischen Massen verschieden von Null ist, der Überschuſs der Kraftlinien nach dem unendlichen Bereiche geht, daſs dann Asymptoten vorhanden sind, die durch den Schwerpunkt S gehen, und daſs diese die unendliche Kugel um S in gleiche Zonen einteilen, so daſs die Cosinus ihrer Neigungswinkel eine arithmetische Reihe bilden, die von 0 bis ± 1 geht.

101) Anordnung in der Ebene. Liegen die sämtlichen Punkte in einer Ebene beliebig zerstreut, so gilt Gleichung 1 wie vorher ganz allgemein, Gleichung 2 aber nur für die Ebene, nicht für den Raum, da die Flächen nicht mehr Drehungsflächen sind. Sind sämtliche Massen positiv, so gelingt mit Hilfe der um den Schwerpunkt gelegten unendlichen Kugel die Einteilung ohne Schwierigkeiten. Hier läſst sich Einblick in ein wichtiges Problem der Mechanik nehmen.

102) Vom Problem der drei Körper und seiner Verallgemeinerung. Die vorhergehenden Betrachtungen geben einigen Einblick in das noch nicht vollständig gelöste Problem der drei Körper. Es wird angenommen, diese befänden sich allein im Welt-

raume und ihre gegenseitige Anziehung folge dem Newtonschen Gesetze. Dann finden folgende gegenseitigen Anziehungen statt:

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2},\ \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}^2},\ \frac{m_3 m_1}{r_{3,1}^2}.$$

Diesen entspricht als Gesamtpotential

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}} + \frac{m_3 m_1}{r_{3,1}},$$

worin $r_{1,2}$, $r_{2,3}$, $r_{3,1}$ die möglichen Verbindungslinien sind. Bei n Punkten handelt es sich um Kombinationen zu je zweien.

Denkt man sich für irgend einen Augenblick des Bewegungszustandes eine Ebene durch die drei Punkte gelegt, so wirkt auf den ersten der drei Punkte allein das Potential

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}},$$

und zwar geschieht die Anziehung in der Richtung der Normalen der durch

$$\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}} = U_1 = c_1$$

dargestellten Niveaulinie, wo $U_1 = c_1$ der augenblickliche Potentialwert ist, oder in der Tangente der durch

$$m_1 m_2 \cos \vartheta_{1,2} + m_1 m_3 \cos \vartheta_{1,3} = \gamma_1$$

dargestellten Kraftlinie, wo die ϑ die Neigungswinkel der beiden Verbindungslinien gegen die Gerade $r_{2,3}$ bezw. ihre Verlängerung bedeuten. Die auf jeden der Punkte augenblicklich wirkende Kraft ist also nach Gröfse und Richtung leicht zu bestimmen, sowohl geometrisch als auch arithmetisch (siehe oben).

Da die Wirkung und die Gegenwirkung für je zwei der Punkte übereinstimmen, ist die Summe der Kräfte in jedem Augenblick gleich Null. Denkt man sich also die Gesamtmasse $m_1 + m_2 + m_3$ im Schwerpunkte angebracht, so ist die auf sie einwirkende Kraft gleich Null. Folglich: Der Schwerpunkt ändert seinen augenblicklichen Bewegungszustand nicht, seine Bewegung ist konstant nach Richtung und Geschwindigkeit.

Kennt man also die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 der drei Punkte für einen Augenblick, so kennt man die Bewegung des Schwerpunktes für alle Zeit. Um sie zu bestimmen, hat man nur nötig, an der im Schwerpunkte gedachten Gesamtmasse die reduzierten Geschwindigkeiten

$$V_1 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad V_2 = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad V_3 = \frac{m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

anzubringen und sie zu vereinigen. Die „Bewegungsquantitäten" sind dann dieselben.

Da diese Verschiebung des Systems nebensächlich ist, kann man sich auf den Fall beschränken, wo die Summe der Geschwindigkeiten gleich Null ist. In den Schwerpunkt verlegt man dann zweckmäfsig den Anfangspunkt des Koordinatensystems, was einige Vereinfachungen bietet. Diese Eigenschaft, die sich auch auf den Fall von n Körpern ausdehnen läfst, nennt man das Schwerpunktsprinzip.

Eine zweite Eigenschaft des Bewegungszustandes ergiebt sich im Anschlufs an die früheren Darlegungen folgendermafsen: Die Energie des Systems für eine Anfangszeit sei

$$E_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2},$$

für eine andere Zeit sei sie E, die entsprechenden Potentialgröfsen seien U_0 und U, dann ist, wie oben,

$$E - E_0 = U - U_0, \; E - U = E_0 - U_0.$$

Die Differenz zwischen Energie und Potential ist also eine konstante Gröfse. Definiert man die potentielle Energie wie früher, so handelt es sich um einen immerwährenden Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie. Da nichts verloren geht, spricht man von der Erhaltung der Arbeit. Das Gesagte läfst sich auf n Punkte ausdehnen, nur ist stets die Bedingung zu stellen, dafs unelastische Stöfse nicht vorkommen.

In dem Gesetz der Erhaltung der Arbeit (Energie) liegt also eine zweite Eigenschaft der Bewegung der drei bezw. der n Körper.

[Eine dritte Eigenschaft soll nur beiläufig erläutert, nicht aber bewiesen werden: das Flächenprinzip. Man denke sich die Bewegungen auf eine der Koordinatenebenen projiziert. Verbindet man nun den Anfangs- und den Endpunkt jedes der drei Wege für eine beliebig gewählte Zeiteinheit, z. B. für die Sekunde, mit dem Nullpunkte des Koordinatensystems, so erhält man drei Sektoren mit den Flächeninhalten F_1, F_2 und F_3. Zu welcher Zeit man nun die Gröfse $F_1 + F_2 + F_3$ messen mag, jederzeit ist sie dieselbe. Also: Zu gleichen Zeiträumen gehören gleiche Summen der Flächenräume. (Die Vektoren zusammengenommen legen in gleichen Zeiten gleiche Summen von Sektoren zurück.)

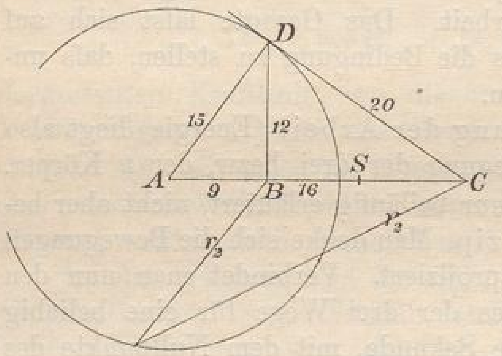
Diese konstante Summe hat verschiedene Werte für verschieden gerichtete Projektionsebenen. Für eine derselben hat sie einen gröfsten Wert. Laplace hat bewiesen, dafs die Lage dieser letzteren Ebene für alle Zeiten dieselbe ist, dafs also ihre Schnittwinkel mit den Koordinatenebenen konstant sind, vorausgesetzt, dafs keine Stöfse vorkommen. Er bezeichnete diese Ebene als die unveränderliche Ebene des Sonnensystems. Die Unveränderlichkeit der Lage folgt daraus, dafs der andern Lage nicht diese, sondern eine andere Summe von Sektoren zukommen würde.]

Obwohl man somit drei wichtige Eigenschaften des Bewegungszustandes dreier Körper und aufserdem für jede gegebene Lage die Gröfse und Richtung der augenblicklich wirkenden Kräfte kennt, ist man doch noch nicht zu einer geschlossenen Lösung des Problems gelangt. Für das System von Sonne, Mond und Erde hat man mit Hilfe der Störungstheorie befriedigende Ergebnisse gefunden, für deren Entwickelung aber elementare Hilfsmittel nicht ausreichen.*)

Die Verallgemeinerungen für n Körper lassen sich ohne weiteres hinschreiben. Das Schwerpunktsprinzip, das Prinzip der lebendigen Kraft und das Flächenprinzip mit der berühmten Laplaceschen Folgerung bleiben dabei bestehen. Auf diesem Wege wurde der von Newton angebahnten Himmelsmechanik durch Laplace ein bedeutungsvoller Fortschritt verschafft.

103) Beispiel mit Kreisen bezw. Kugeln. In Maxwells Lehrbuche der Elektrizität und des Magnetismus befinden sich einige nach den angegebenen Prinzipien exakt gezeichnete Figuren. Auf Tafel V z. B. ist der Fall $A = 15$, $B = -12$, $C = 20$ behandelt, wobei $AB = 9$, $BC = 16$ ist. Der Fall ist von besonderem Interesse. Da die in Figur 80 wiedergegebene Zeichnung bei Maxwell nur beschrieben wird, die betreffenden Berechnungen und Beweise aber dem Leser überlassen werden, sei das interessante Beispiel hier ausführlicher behandelt.

Fig. 79.



Man denke sich über AC in Fig. 79 einen Halbkreis geschlagen und in B auf AC das Lot BD errichtet. Dies giebt ein rechtwinkliges

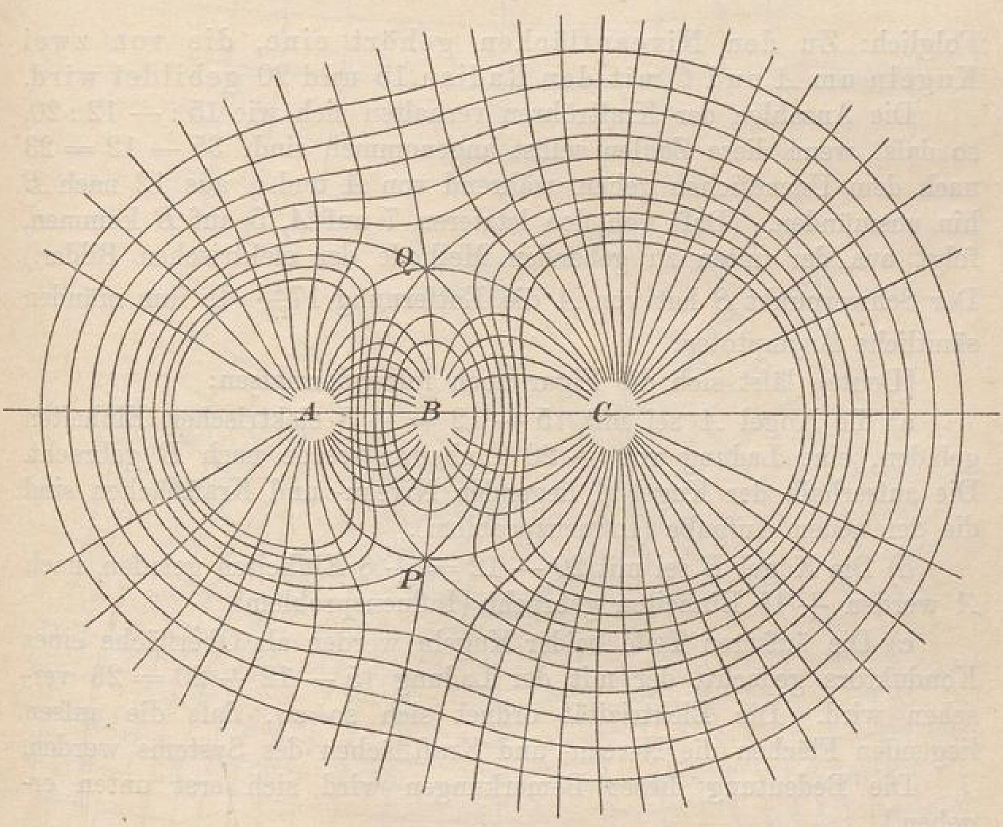
*) B. G. Airy hat allerdings in dem Werke: Gravitation; an elementary explanation of the principal perturbations in the solar system, London 1834, einen solchen Versuch gemacht. Im Programm 1894/95 des Realgymnasiums zu Borna ist ein Teil davon frei bearbeitet. Aufserdem werden dort Übersetzungen von Littrow und Hoffmann genannt.

Dreieck ACD mit $AD = 15$, $CD = 20$, $BD = 12$. Denkt man sich um A mit $AD = 15$ einen Kreis geschlagen, so ist

$$AB \cdot AC = 9 \cdot 25 = 15^2 = AD^2,$$

d. h. B ist der reciproke Punkt von C.

Fig. 80.



Der Potentialwert für jeden Punkt der Ebene ist $\frac{15}{r_1} - \frac{12}{r_2} + \frac{20}{r_3}$. Für die Punkte des um A geschlagenen Kreises handelt es sich um $1 - \frac{12}{r^2} + \frac{20}{r_3}$. Nun ist aber nach bekanntem Satze (Method. Lehrbuch II 62) für jeden Punkt dieses Kreises

$$BE : CE = 12 : 20 = 3 : 5, \quad \text{also} \quad r_3 = \tfrac{5}{3} r_2,$$

also ist für jeden Punkt des Kreises der Potentialwert

$$1 - \frac{12}{r_2} + 20 \cdot \frac{3}{5 r_2} = 1.$$

Die um A mit dem Radius 15 gelegte Kugel ist also der Ort für das konstante Potential 1*).

Für die um C mit Radius 12 gelegte Kugel handelt es sich um das Potential $\frac{15}{r_1} - \frac{12}{r_2} + 1$. Dabei ist überall $r_1 : r_2 = 15 : 12 = 5 : 4$, also das Potential

$$\frac{15}{r_1} - \frac{12 \cdot 5}{4 \cdot r_1} + 1 = 1.$$

Folglich: Zu den Niveauflächen gehört eine, die von zwei Kugeln um A und C mit den Radien 15 und 20 gebildet wird.

Die Anzahlen der Kraftröhren verhalten sich wie 15 : — 12 : 20, so dafs, wenn diese Zahlen selbst angenommen sind, 35 — 12 = 23 nach dem Unendlichen gehen, während von A und C aus 12 nach B hin ausmünden. (Dafs von den letzteren 7 auf A, 5 auf B kommen, folgt aus der unten zu gebenden Methode der elektrischen Bilder.) Der Schwerpunkt S hat von A die Entfernung $17\frac{1}{23}$. In ihm münden sämtliche Asymptoten.

[Deuten läfst sich die Figur noch folgendermafsen:

a) die Kugel A sei mit 15 — 12 = + 3 elektrischen Einheiten geladen, eine Ladung von + 20 Einheiten werde nach B gebracht. Die aufserhalb der Kugel A liegenden Niveau- und Kraftflächen sind die der neuen Aufgabe (Influenzproblem).

b) Die Kugel B sei mit 20 — 12 = + 8 Einheiten geladen, nach A werden + 15 Einheiten gebracht (Influenzproblem).

c) Die äufseren Teile beider Kugeln werden als Oberfläche eines Konduktors gedacht, der mit der Ladung 15 — 12 + 20 = 23 versehen wird. Die Elektrizität ordnet sich so an, dafs die aufsen liegenden Flächen die Niveau- und Kraftflächen des Systems werden.

Die Bedeutung dieser Bemerkungen wird sich erst unten ergeben.]

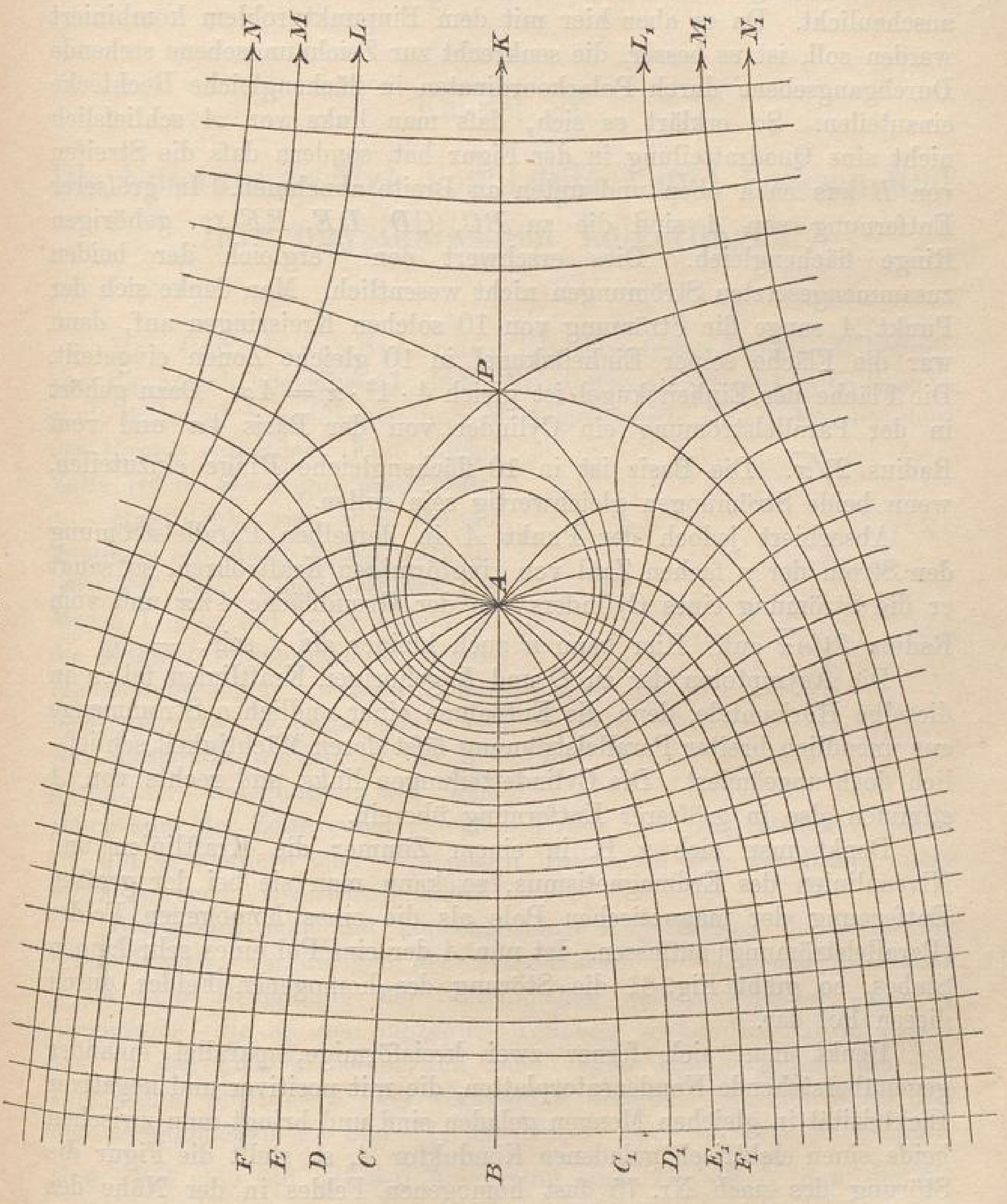
104) Geladener Konduktor im homogenen Felde. Denkt man sich bei dem symmetrischen Zweipunktsystem ungleichartiger Elektrizitäten die Punkte M_1 und M_2 unendlich fern voneinander, so erhält man in der Umgebung von M ein sogenanntes homogenes Feld, bei dem das Netz der Kraft- und Niveaulinien quadratisch wird. Legt man in die eine Parallelenschar die Kraftlinien des Einpunktproblems, in die andere dessen Niveaulinien, so geben die Diagonalkurven das in Fig. 81 dargestellte Netz, welches ebenfalls dem Maxwellschen Lehrbuch entnommen ist.

---

*) Bei Maxwell-Weinstein steht irrtümlich Null.

Es handelt sich dabei gewissermafsen um eine räumliche Parallelströmung, von der ein Teil durch A aufgesaugt wird, oder um eine entgegengesetzte Strömung, zu der ein Teil in A hinzutritt.

Fig. 81.



Man kann auch von der Störung reden, die innerhalb eines homogenen, positiven elektrischen Feldes durch eine negative Punktladung hervorgebracht wird.

Die beiden unendlich fernen Punkte M_1 und M_2 müssen selbstverständlich unendlich stark geladen sein, und zwar mit gleich grofsen Mengen entgegengesetzter Elektrizitäten.

Das homogene Feld wird in der Regel durch ein Quadratnetz veranschaulicht. Da es aber hier mit dem Einpunktproblem kombiniert werden soll, ist es besser, die senkrecht zur Zeichnungsebene stehende Durchgangsebene durch Polarkoordinaten in flächengleiche Rechtecke einzuteilen. So erklärt es sich, dafs man links von A schliefslich nicht eine Quadratteilung in der Figur hat, sondern dafs die Streifen von B aus nach oben und unten an Breite abnehmen. In gröfserer Entfernung von A sind die zu BC, CD, DE, EF ... gehörigen Ringe flächengleich. Dies erschwert den Vergleich der beiden zusammengesetzten Strömungen nicht wesentlich. Man denke sich der Punkt A sauge die Strömung von 10 solchen Kreisringen auf, dann war die Fläche seiner Einheitskugel in 10 gleiche Zonen eingeteilt. Die Fläche der Einheitskugel ist gleich $4 \cdot 1^2 \cdot \pi = 4\pi$. Dazu gehört in der Parallelströmung ein Cylinder von der Basis 4π und vom Radius $2\sqrt{\pi}$. Die Basis ist in 10 flächengleiche Ringe einzuteilen, wenn beide Strömungen gleichwertig sein sollen.

Absorbiert jedoch der Punkt A in derselben Parallelströmung den Strom der n fachen Zahl von ringförmigen Kraftröhren, so saugt er die Strömung eines Cylinders von der Grundfläche $4n\pi$ und vom Radius $2\sqrt{n\pi}$ auf. Hier kann n auch kleiner als 1 sein. —

Die Asymptoten der zu C und L gehörigen Kraftlinien fallen in dieselbe Horizontale, denn die Entnahme einer endlichen Strommenge aus unendlich breiter Parallelströmung läfst deren Mächtigkeit schliefslich doch ungeändert. Die Cylinderteilungen links und rechts von A stimmen also in gröfserer Entfernung überein.

Denkt man sich z. B. in einem Zimmer die Kraftlinien und Niveaulinien des Erdmagnetismus, so kann man sie bei der grofsen Entfernung der magnetischen Pole als die eines homogenen Feldes (Parallelströmung) auffassen. Ist nun A der eine Pol eines sehr langen Stabes, so giebt Fig. 81 die Störung des homogenen Feldes durch diesen Pol dar.

Denkt man sich ferner zwei kreisförmige, parallel einander gegenüberstehende Kondensatorplatten, die mit positiver und negativer Elektrizität in gleichen Mengen geladen sind und bringt man zwischen beide einen elektrisch geladenen Konduktor A, so stellt die Figur die Störung des nach Nr. 75 fast homogenen Feldes in der Nähe des Konduktors A dar. Das Beispiel ist von besonderer Wichtigkeit, weil bei zahlreichen Experimenten der Einflufs des Erdmagnetismus berücksichtigt werden mufs.