Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

79) Hilfssatz aus der Mechanik, algebraische Addition der Arbeiten betreffend

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

Zurückführung von Problemen der Mechanik auf solche der Potentialtheorie.

Von den Hamiltonschen Methoden, die auf die Quaternionen geführt haben, soll hier nichts vorausgesetzt werden, da ein einfacher Hilfssatz ausreicht, der in jedem Lehrbuche der Mechanik stehen sollte.

79) Hilfssatz aus der Mechanik. Die Arbeit der Resultante ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Seitenkräfte.

Beweis. 1. Die Resultante von p_1 und p_2 sei p, $PQ = w$ der Weg des Angriffspunktes P, so dafs pw die Arbeit der Resultante ist. Projiziert man den Weg w auf die Richtungslinien der Seitenkräfte, so erhält man $PQ_1 = w_1$ und $PQ_2 = w_2$ als die (virtuellen) Wege in den Richtungen dieser Kräfte, so dafs die in diesen Richtungen vollführten Arbeiten $p_1 w_1$ und $p_2 w_2$ sind. Ihre algebraische Summe ist

$$\begin{aligned} p_1 w_1 + p_2 w_2 &= p_1 w \cos\alpha_1 + p_2 w \cos\alpha_2 = w(p_1 \cos\alpha_1 + p_2 \cos\alpha_2) \\ &= w(PB_1 + PB_2) = w(PB_1 + B_1 C) = w_1 PC = pw, \end{aligned}$$

sie ist also gleich der Arbeit der Resultante. Vgl. Fig. 57.

Fig. 57.

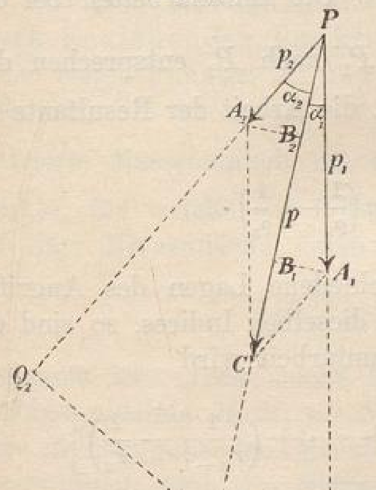
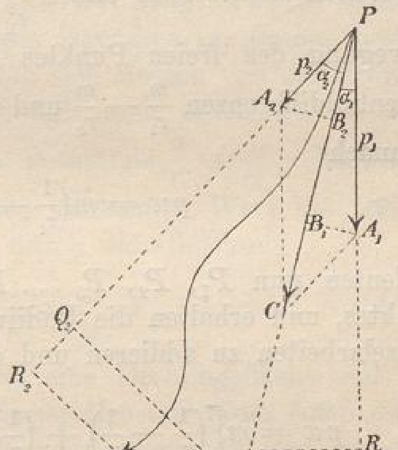


Fig. 58.



Die Addition der Arbeiten geschieht also einfach algebraisch ohne jede Berücksichtigung der Richtungen. Arbeitsgröfsen gehören daher zu den Skalaren.

2. Behalten die Kräfte p, p_1 und p_2 ihre Richtungen stets bei, so kann P einen beliebigen Weg PR zurücklegen, ohne dafs sich

etwas ändert. Geschieht die Bewegung z. B. in der Ebene der Kräfte, so ist der Weg auf die drei Kraftlinien zu projizieren, was die „virtuellen" Wege PQ, PQ_1 und PQ_2 geben mag. Projiziert man noch Q nach Q_1 und Q_2, und setzt man $RQ = e$, so ist, da auch bei R und Q die Winkel α_1 und α_2 auftreten, $R_1Q_1 = e \sin \alpha_1$, $R_2Q_2 = e \sin \alpha_2$, also, da $A_1B_1 = A_2B_2$, oder $p_1 \sin \alpha_1 = p_2 \sin \alpha_2$ ist, $p_1 \cdot R_1Q_1 = p_2 \cdot Q_2R_2$. Vorher war $p_1 \cdot PQ_1 + p_2 \cdot PQ_2 = p \cdot PQ$, jetzt ist $(p_1 \cdot PQ_1 - p_1 \cdot R_1Q_1) + (p_2 \cdot PQ_2 + p_2 \cdot Q_2R_2) = p \cdot PQ$ oder $p_1 \cdot PR_1 + p_2 \cdot PR_2 = p \cdot PQ$. Der Satz bleibt also bestehen.

Tritt der Angriffspunkt aus der Ebene der Kräfte heraus, so kann sich z. B. R senkrecht über der gezeichneten Lage im Raume befinden. Die Figur ist dann die Projektion der zugehörigen räumlichen Figur. Am Beweise ändert sich sonst nichts. Vgl. Fig. 58.

3. Ändern die Kräfte während der Bewegung des Angriffspunktes stetig ihre Richtungen, wie es z. B. bei der Anziehung durch mehrere feste Punkte geschieht, so gilt der obige Beweis zunächst nur für eine unendlich kleine Bewegung, durch Summierung aber für die gesamte Bewegung.

4. Das Beispiel der Anziehung durch zwei feste Punkte nach dem Newtonschen Gesetze wird dies erläutern. Die auf die Einheit wirkenden Kräfte sind dabei $\frac{m}{r_1^2}$ und $\frac{\mu}{\varrho_1^2}$. Die Einzelarbeiten bei der Bewegung des freien Punktes P von P_1 nach P_2 entsprechen den Potentialdifferenzen $\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$ und $\frac{\mu}{\varrho_1} - \frac{\mu}{\varrho_2}$, die Arbeit der Resultante ist demnach

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Bedeuten nun $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$ verschiedene Lagen des Angriffspunktes, und erhalten die Radiivectores dieselben Indices, so sind die Einzelarbeiten zu addieren und die Gesamtarbeit wird

$$pw = m\left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}\right)\right]$$
$$+ \mu\left[\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) + \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\varrho_{n-1}} - \frac{1}{\varrho_n}\right)\right],$$

oder

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_n}\right).$$

Dies gilt für beliebig gestaltete Wege von beliebiger Länge.

Entfernt man p ins Unendliche, so ist der Arbeitsaufwand

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{m}{r_1} + \frac{\mu}{\varrho_1},$$

d. h. gleich der algebraischen Summe der Einzelpotentiale.

Man bezeichnet die dazu nötige Arbeit als das Gesamtpotential, folglich gilt zunächst für zwei Punkte der Satz:

Das Gesamtpotential ist gleich der algebraischen Summe der Einzelpotentiale $V = V_1 + V_2$.

Die Ausdehnung auf mehrere Punkte, die beliebig im Raume lagern und anziehend wirken, sei dem Leser überlassen. Neues tritt dabei nicht auf.

Handelt es sich um ein aus unendlich vielen Punkten bestehendes Massengebilde, also um eine Linie, oder um eine Fläche, oder einen Körper von beliebiger Gestalt, so wird die Ermittelung der Kraftresultanten in der Regel auf Schwierigkeiten stofsen. Leichter ist es im allgemeinen, die algebraische Addition der Potentialwerte durchzuführen und aus dem Gesamtpotential auf einem noch zu lehrenden Wege die Kraftresultante abzuleiten. Aufserdem erhalten gewisse Sätze der Mechanik durch die Benutzung des Potentialbegriffs eine weit einfachere Form, als bei der Anwendung des Kraftbegriffs. Darin liegt der in Nr. 14 angedeutete weitere Vorteil der Greenschen Theorie.

80) Die Niveauflächen für das Problem zweier gleich stark anziehender Punkte. In zwei irgendwo im Raume befindlichen festen Punkten M_1 und M_2 mögen sich Massen von der Gröfse 1 befinden. Sie wirken auf die frei bewegliche in einem Punkte koncentrierte Masseneinheit ein mit dem Potentiale $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Sämtliche Punkte, für welche das Potential einen konstanten Wert hat, liegen auf einer Niveaufläche, deren Gestalt durch die Gleichung

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$$

bestimmt ist. Jede solche Fläche ist eine Drehungsfläche mit der Verbindungslinie $M_1 M_2$ als Achse. Es ist also nur nötig einen durch diese Achse gehenden Meridianschnitt zu untersuchen und nur von Niveaulinien, statt von Niveauflächen zu sprechen.

Die mechanische Bedeutung der Niveaulinien bezw. Niveauflächen besteht darin, dafs zur Bewegung der Masseneinheit von einer solchen Fläche nach einer anderen sie umschliefsenden eine gewisse Arbeit nötig ist, die gleich dem Potentialunterschiede ist. Zur Bewegung der Masseneinheit nach einer der inneren Flächen ist nicht positive Arbeit nötig, sondern negative, d. h. diese wird durch die anziehenden Punkte ausgeübt und vermehrt die Energie $\frac{1 \cdot v^2}{2}$ der frei beweglichen