Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

80) Niveauflächen für das Problem zweier gleich stark anziehender Punkte

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

$$pw = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\infty}\right) + \mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{m}{r_1} + \frac{\mu}{\varrho_1},$$

d. h. gleich der algebraischen Summe der Einzelpotentiale.

Man bezeichnet die dazu nötige Arbeit als das Gesamtpotential, folglich gilt zunächst für zwei Punkte der Satz:

Das Gesamtpotential ist gleich der algebraischen Summe der Einzelpotentiale $V = V_1 + V_2$.

Die Ausdehnung auf mehrere Punkte, die beliebig im Raume lagern und anziehend wirken, sei dem Leser überlassen. Neues tritt dabei nicht auf.

Handelt es sich um ein aus unendlich vielen Punkten bestehendes Massengebilde, also um eine Linie, oder um eine Fläche, oder einen Körper von beliebiger Gestalt, so wird die Ermittelung der Kraftresultanten in der Regel auf Schwierigkeiten stofsen. Leichter ist es im allgemeinen, die algebraische Addition der Potentialwerte durchzuführen und aus dem Gesamtpotential auf einem noch zu lehrenden Wege die Kraftresultante abzuleiten. Aufserdem erhalten gewisse Sätze der Mechanik durch die Benutzung des Potentialbegriffs eine weit einfachere Form, als bei der Anwendung des Kraftbegriffs. Darin liegt der in Nr. 14 angedeutete weitere Vorteil der Greenschen Theorie.

80) Die Niveauflächen für das Problem zweier gleich stark anziehender Punkte. In zwei irgendwo im Raume befindlichen festen Punkten M_1 und M_2 mögen sich Massen von der Gröfse 1 befinden. Sie wirken auf die frei bewegliche in einem Punkte koncentrierte Masseneinheit ein mit dem Potentiale $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Sämtliche Punkte, für welche das Potential einen konstanten Wert hat, liegen auf einer Niveaufläche, deren Gestalt durch die Gleichung

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$$

bestimmt ist. Jede solche Fläche ist eine Drehungsfläche mit der Verbindungslinie $M_1 M_2$ als Achse. Es ist also nur nötig einen durch diese Achse gehenden Meridianschnitt zu untersuchen und nur von Niveaulinien, statt von Niveauflächen zu sprechen.

Die mechanische Bedeutung der Niveaulinien bezw. Niveauflächen besteht darin, dafs zur Bewegung der Masseneinheit von einer solchen Fläche nach einer anderen sie umschliefsenden eine gewisse Arbeit nötig ist, die gleich dem Potentialunterschiede ist. Zur Bewegung der Masseneinheit nach einer der inneren Flächen ist nicht positive Arbeit nötig, sondern negative, d. h. diese wird durch die anziehenden Punkte ausgeübt und vermehrt die Energie $\frac{1 \cdot v^2}{2}$ der frei beweglichen

Masse um einen Betrag, der gleich der Potentialdifferenz für die Endpunkte des Weges ist. Zur Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf der Fläche selbst ist die Arbeit Null nötig. Die Resultante der Anziehung steht also senkrecht auf der Niveaufläche. Nun läfst sich aber die Resultante der Kräfte $p_1 = \frac{1}{r_1^2}$ und $p_2 = \frac{1}{r_2^2}$ aus r_1 und r_2 leicht konstruieren, folglich ist die Resultante und damit zugleich die Normale der Niveaulinie in jedem Punkte elementar konstruierbar, ebenso die Tangente und die durch diese senkrecht zum Meridianschnitt gelegte Tangentialebene der Niveaufläche elementar konstruierbar.

Da jede Niveaulinie dieses Problems zwei Symmetrieachsen hat, die Gerade $M_1 M_2$ und die zugehörige Mittelsenkrechte, so kann man die Betrachtung auf einen Quadranten beschränken.

Denkt man sich die Niveaulinien so aufeinander folgend, dafs die Werte von c einer arithmetischen Reihe folgen, z. B. der Reihe

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} = 1, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots, \frac{n+n}{n} = 2, \frac{2n+1}{n}, \ldots$$

so gilt folgendes:

Wie sich auch P von P_1 aus nach aufsen hin bewege, stets ist von einer Niveaulinie zur andern derselbe Arbeitsaufwand $\frac{1}{n}$ nötig. Geht P nach innen, so ist natürlich der Arbeitsaufwand negativ. Geschieht nämlich die kleine Verschiebung um w längs der Kraftlinie und ist der Mittelwert des Widerstandes gleich p, so ist die geleistete Arbeit gleich pw. Weicht die Richtung des Weges um α ab, so handelt es sich um die Kraft $p_1 \cos \alpha$ und den Weg $w_1 = \frac{w}{\cos \alpha}$, so dafs wiederum $p_1 w_1 = pw$ ist.

Trägt man an jeder Stelle des Weges auf der Ebene ein Lot auf, welches gleich der Projektion der Anziehungsresultante p an dieser Stelle auf die Bewegungsrichtung ist, so erhält man das Arbeitsdiagramm für den Verlauf der Bewegung von P. Wie nun auch von P_1 aus nach einer der Niveaulinien gewandert werde, stets erhält man denselben Arbeitsaufwand und dieselbe Diagrammfläche, als ob man den Weg von der einen Niveaulinie zur andern auf der x-Achse oder y-Achse gemacht hätte. (Die x-Achse soll die Verbindungslinie der beiden festen, anziehenden Punkte sein, die y-Achse die Mittelsenkrechte dazu.) Geht das Diagramm von P_1 aus bis ins Unendliche auf beliebig gewundenen Wegen, stets ist sein Inhalt gleich $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. (Vergl. dazu Nr. 14.)