Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

81) Konstruktion dieser Niveauflächen

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

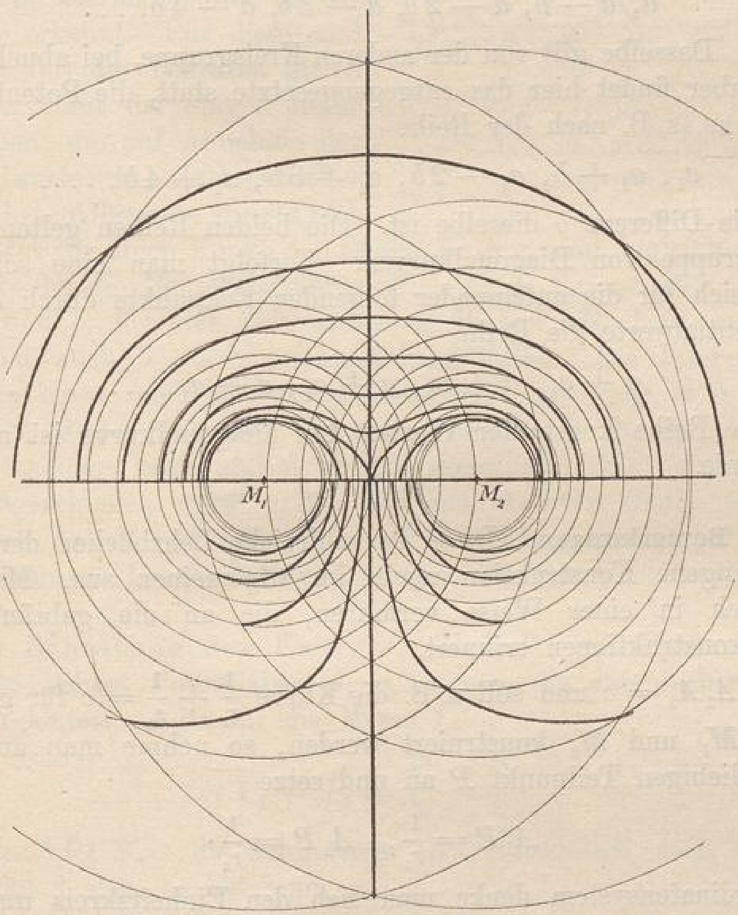
81) **Aufgabe.** Die Niveaulinien für dieses Problem zu konstruieren.

Auflösung. Man schlage um die festen Punkte M_1 und M_2 Kreise mit den Radien, deren reciproke Werte einer arithmetischen Reihe, z. B. 0, 1, 2, 3, 4, ... entsprechen, also z. B. mit den Radien

$$\infty,\ 1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \ldots,$$

allgemeiner mit den in Fig. 10 zu A_1, A_2, A_3, A_4, ... gehörigen Ordinaten (und etwa auch mit den durch Halbierung der Grundlinien

Fig. 59.



zu bestimmenden Ordinaten), so daſs man ein Netz krummliniger Vierecke erhält. Die Diagonalkurven dieses Netzes können mit beliebiger Genauigkeit eingezeichnet werden, indem man durch fortgesetzte Interpolation von Ordinaten der Fig. 10 die Zahl der Vierecke beliebig vermehrt. Im oberen Teile der Fig. 59 sind die hierher gehörigen Diagonalkurven gezeichnet. Der untere Teil, der symmetrisch zum oberen ist, ist dort weggelassen. (Die unten gezeichnete Kurvengruppe kommt später zur Sprache, sie entspricht den Niveaulinien für Punkte M_1 und M_2, von denen der eine ebenso stark abstofsend wirkt, wie der andere anziehend.)

Beweis. Dafs diese Diagonalkurven solche konstanten Potentials, also Niveaulinien sind, ergiebt sich folgendermafsen.

Die zu M_1 gehörige Kreisgruppe giebt bei zunehmenden Radien nach der Konstruktion Potententialwerte, die nach arithmetischer Reihe abnehmen. Von irgend einem der Eckpunkte aus möge es sich z. B. um die Reihe

$$a,\ a-b,\ a-2b,\ a-3b,\ a-4b,\ \ldots$$

handeln. Dasselbe gilt von der anderen Kreisgruppe, bei abnehmenden Radien aber findet hier das entgegengesetzte statt, die Potentialwerte nehmen zu, z. B. nach der Reihe

$$a_1,\ a_1+b,\ a_1-2b,\ a_1+3b,\ a_1+4b,\ \ldots,$$

wobei die Differenz b dieselbe ist. Die beiden Reihen gelten für die obere Gruppe von Diagonalkurven. Verfolgt man eine solche, so ergiebt sich für die aufeinander folgenden Eckpunkte durch Addition der Potentialwerte die Reihe

$$a+a_1,\ a+a_1,\ a+a_1,\ a+a_1,\ \ldots,$$

d. h. eine Reihe konstanter Werte. Die Diagonalkurve ist also eine Niveaulinie.

82) **Bemerkungen.** Diese in zahlreiche Lehrbücher der Physik übergegangene Konstruktion reicht im allgemeinen aus. Man kann aber auch in einer Weise verfahren, die an die gebräuchlichen Ellipsenkonstruktionen erinnert.

Ist $A_1A_2 = c$ und soll z. B. die Kurve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$ für gegebene Punkte M_1 und M_2 konstruiert werden, so nehme man auf A_1A_2 einen beliebigen Teilpunkt P an und setze

$$A_1P = \frac{1}{r_1},\quad A_2P = \frac{1}{r_2}.$$

Im Koordinatensystem denke man sich den Einheitskreis um O geschlagen und mache auf der X-Achse $OB_1 = A_1P$, $OP_2 = A_2P$. Die in B_1 und B_2 auf der X-Achse errichteten Lote geben auf dem Kreise Punkte C_1 und C_2. Die Tangenten in diesen schneiden die X-Achse in D_1 und D_2. Jetzt ist $OD_1 = r_1$ und $OD_2 = r_2$. Mit diesen Radien schlage man um die festen Punkte M_1 und M_2 (z. B. um die Punkte ± 1) Kreisbogen, die, wenn sie sich schneiden, zwei und bei Vertauschung der Mittelpunkte nochmals zwei Punkte der