



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

82) Bemerkungen

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

oberen ist, ist dort weggelassen. (Die unten gezeichnete Kurvengruppe kommt später zur Sprache, sie entspricht den Niveaulinien für Punkte M_1 und M_2 , von denen der eine ebenso stark abstossend wirkt, wie der andere anziehend.)

Beweis. Dafs diese Diagonalkurven solche konstanten Potentials, also Niveaulinien sind, ergibt sich folgendermassen.

Die zu M_1 gehörige Kreisgruppe giebt bei zunehmenden Radien nach der Konstruktion Potentialwerte, die nach arithmetischer Reihe abnehmen. Von irgend einem der Eckpunkte aus möge es sich z. B. um die Reihe

$$a, a - b, a - 2b, a - 3b, a - 4b, \dots$$

handeln. Dasselbe gilt von der anderen Kreisgruppe, bei abnehmenden Radien aber findet hier das entgegengesetzte statt, die Potentialwerte nehmen zu, z. B. nach der Reihe

$$a_1, a_1 + b, a_1 - 2b, a_1 + 3b, a_1 + 4b, \dots,$$

wobei die Differenz b dieselbe ist. Die beiden Reihen gelten für die obere Gruppe von Diagonalkurven. Verfolgt man eine solche, so ergibt sich für die aufeinander folgenden Eckpunkte durch Addition der Potentialwerte die Reihe

$$a + a_1, a + a_1, a + a_1, a + a_1, \dots,$$

d. h. eine Reihe konstanter Werte. Die Diagonalkurve ist also eine Niveaulinie.

82) **Bemerkungen.** Diese in zahlreiche Lehrbücher der Physik übergegangene Konstruktion reicht im allgemeinen aus. Man kann aber auch in einer Weise verfahren, die an die gebräuchlichen Ellipsenkonstruktionen erinnert.

Ist $A_1 A_2 = c$ und soll z. B. die Kurve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$ für gegebene Punkte M_1 und M_2 konstruiert werden, so nehme man auf $A_1 A_2$ einen beliebigen Teilpunkt P an und setze

$$A_1 P = \frac{1}{r_1}, \quad A_2 P = \frac{1}{r_2}.$$

Im Koordinatensystem denke man sich den Einheitskreis um O geschlagen und mache auf der X -Achse $OB_1 = A_1 P$, $OP_2 = A_2 P$. Die in B_1 und B_2 auf der X -Achse errichteten Lote geben auf dem Kreise Punkte C_1 und C_2 . Die Tangenten in diesen schneiden die X -Achse in D_1 und D_2 . Jetzt ist $OD_1 = r_1$ und $OD_2 = r_2$. Mit diesen Radien schlage man um die festen Punkte M_1 und M_2 (z. B. um die Punkte ± 1) Kreisbogen, die, wenn sie sich schneiden, zwei und bei Vertauschung der Mittelpunkte nochmals zwei Punkte der

Kurve geben, so dafs man nur einen Quadranten zu konstruieren nötig hat. Jeder Teilpunkt von A_1A_2 giebt so im allgemeinen vier reelle Punkte, jedoch hat die Teilung, wie bei der Ellipsenkonstruktion, eine bestimmte Grenze.

Giebt man $A_1A_2 = c$ verschiedene Werte, so erhält man die ganze Kurvengruppe. Die vorige Methode giebt ganz von selbst eine potentiell gleichwertige Einteilung, wie man sofort an der Y -Achse erkennt. Für diese sind (vgl. Fig. 59) die Vektoren gleich und jeder folgt der obigen Reihe der Radien, die auf Abnahme der Potentialwerte in arithmetischer Reihe führt. Allgemein ergibt sich

dies so: Ist für einen Punkt der Ebene $V_1 = c_1$ und zugleich $V_2 = c_2$, so ist für ihn die Potentialsumme $V = V_1 + V_2 = c_1 + c_2$. Folgen also c_1 und c_2 für sich arithmetischen Reihen, die beide zunehmen, so wächst auch V nach arithmetischer Reihe. Die Intervalle von Kurve zu Kurve sind also potentiell gleichwertig, d. h. den angezogenen Körper von einer Kurve zur anderen zu bringen, erfordert bei dem Gange nach aufsen überall dieselbe Arbeit, welcher Weg auch eingeschlagen werde. Bei dem umgekehrten Gange wird entsprechende Arbeit gewonnen, d. h. der frei bewegliche Körper gewinnt entsprechend an Geschwindigkeit und an Energie.

83) Erhaltung der Energie. Sind P_1 und P_2 im letzteren Falle die beiden Potentialwerte, v_1 und v_2 die entsprechenden Geschwindigkeiten, so ist für die Masse 1

$$P_2 - P_1 = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}.$$

Betrachtet man die Schluslage als veränderlich, läfst man also die Marke 2 weg, so hat man

$$P - P_1 = \frac{1}{2} (v^2 - v_1^2)$$

oder

$$P - \frac{v^2}{2} = P_1 - \frac{v_1^2}{2},$$

d. h. $P - \frac{v^2}{2}$ ist eine konstante Gröfse. Darin liegt der Satz von der Erhaltung der Energie für dieses Problem.

Fig. 60.

