



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

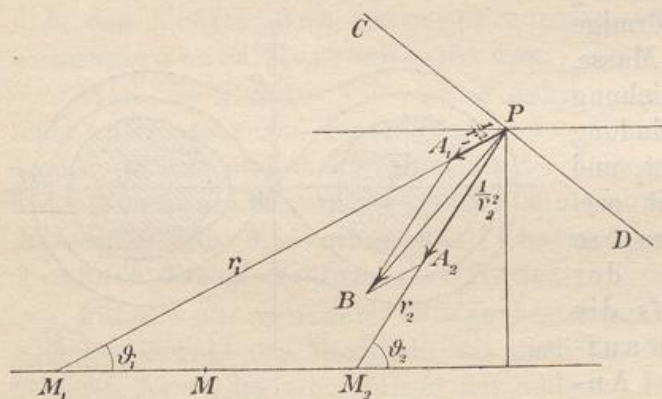
86) Tangentenkonstruktion für die Kurve $1/r_1 + 1/r_2 = c$

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Rechnung bestimmt, was nach obigem zugleich die Normale und Tangente für jede Stelle jeder Niveaulinie giebt, so daß elementare Behandlung der Kurven möglich ist. Dabei möge $m = 1$ gesetzt werden.

86) **Aufgabe.** P sei ein Punkt der Kurve $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$, die Normale und die Tangente der Kurve sollen für P konstruiert und ihre Neigungen berechnet werden.

Fig. 63.



Auflösung. Man konstruiere nach obigem Verfahren

$$PA_1 = \frac{1}{r_1}$$

und

$$PA_2 = \frac{1}{r_2}$$

und setze beides nach dem Parallelogramm der Kräfte

zusammen. Dies giebt p nach Größe und Richtung und mit letzterer die Normale. Das Lot auf dieser giebt die Tangentenrichtung in P .

Will man p durch Rechnung finden, so ergibt es sich aus

$$p^2 = \frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2}.$$

Man kann auch mit Hilfe der wagerechten und senkrechten Seitenkräfte rechnen, was

$$-\xi = \frac{\cos \vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\cos \vartheta_2}{r_2^2}, \quad -\eta = \frac{\sin \vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\sin \vartheta_2}{r_2^2} \quad \text{und} \quad p = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

giebt. Dadurch findet man zugleich die Tangente des Neigungswinkels α gegen die positive Richtung der X -Achse als

$$\tan \alpha = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\frac{\sin \vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\sin \vartheta_2}{r_2^2}}{\frac{\cos \vartheta_1}{r_1^2} + \frac{\cos \vartheta_2}{r_2^2}} = \frac{r_2^2 \sin \vartheta_1 + r_1^2 \sin \vartheta_2}{r_2^2 \cos \vartheta_1 + r_1^2 \cos \vartheta_2}.$$

Sind M_1 und M_2 nach ± 1 verlegt, so hat man

$$\tan \alpha = \frac{\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3}}{\frac{x+1}{r_1^3} + \frac{x-1}{r_2^3}} = \frac{r_2^3 y + r_1^3 y}{r_2^3 (x+1) + r_1^3 (x-1)} = \frac{\sin^3 \vartheta_1 + \sin^3 \vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_1 \cos \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_2 \cos \vartheta_2}.$$

Die Tangentenrichtung β der Niveaulinie folgt aus $\tan \beta = -\frac{1}{\tan \alpha}$.
 [Dieselben Resultate erhält man durch implicites Differentiieren.]

87) Die Linien gleicher Intensität und gleicher Kraft-
 richtung.

Setzt man $p = c_1$, d. h.

$$\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4} + \frac{2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2} = c_1^2,$$

so hat man die Gleichung der Linien gleicher Anziehungsstärke (gleicher Intensität). Jede derselben passiert nach dem Gesetze $\frac{p}{p_1} = \frac{w_1}{w}$ zugleich die Stellen konstanten Abstandes w benachbarter Niveaulinien, vorausgesetzt, daß die Werte c des Potentials einer arithmetischen Reihe folgen, bei der die konstante Differenz sehr klein zu denken ist. Auf diesen Punkt kommt die Betrachtung später zurück.

Die Linien

$$\tan \alpha = \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{r_2^3 y + r_1^3 y}{r_2^3 (x+1) + r_1^3 (x-1)} = \gamma$$

sind Linien konstanter Anziehungsrichtung. Legt man also eine Schar paralleler Tangenten an die Schar der Niveaulinien, so erhält man diese Art von Kurven, deren Bedeutung gleichfalls noch einmal zur Sprache kommt.

Denkt man sich die Punkte M_1 und M_2 mit gleichen Mengen von positivem Magnetismus (bezw. Elektrizität) geladen, so würde eine kleine Magnetnadel sich überall in der Richtung der Resultante einstellen, wobei von dem störenden Erdmagnetismus jetzt abzusehen ist. Der eine Pol unterliegt nämlich der Wirkung der konstruierten Resultante, der andere einer entgegengesetzt zu zeichnenden Resultante. Es giebt eine Lage stabilen und eine Lage labilen Gleichgewichts.

Denkt man sich die Nadel senkrecht gegen die Resultante gestellt, so ist das statische Moment des wirkenden Kräftepaars (ein solches wirkt bei sehr kleiner Nadel, da dann die beiden Resultanten gleich und parallel, aber entgegengesetzt sind) ein Maximum. Die Nadel hat in Bezug auf ihren Drehungspunkt ein bestimmtes Träg-