Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

87) Die Linien gleicher Intensität und gleicher Kraftrichtung für das Zweipunktproblem.

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y}{r_1^3}+\frac{y}{r_2^3}}{\frac{x+1}{r_1^3}+\frac{x-1}{r_2^3}} = \frac{r_2^3 y + r_1^3 y}{r_2^3(x+1)+r_1^3(x-1)} = \frac{\sin^3\vartheta_1+\sin^3\vartheta_2}{\sin^2\vartheta_1\cos\vartheta_1+\sin^2\vartheta_2\cos\vartheta_2}.$$

Die Tangentenrichtung β der Niveaulinie folgt aus $\tan\beta = -\frac{1}{\tan\alpha}$. [Dieselben Resultate erhält man durch implicites Differentiieren.]

87) Die Linien gleicher Intensität und gleicher Kraftrichtung.

Setzt man $p = c_1$, d. h.

$$\frac{1}{r_1^4}+\frac{1}{r_2^4}+\frac{2\cos(\vartheta_2-\vartheta_1)}{r_1^2 r_2^2} = c_1^2,$$

so hat man die Gleichung der Linien gleicher Anziehungsstärke (gleicher Intensität). Jede derselben passiert nach dem Gesetze $\frac{p}{p_1} = \frac{w_1}{w}$ zugleich die Stellen konstanten Abstandes w benachbarter Niveaulinien, vorausgesetzt, daſs die Werte c des Potentials einer arithmetischen Reihe folgen, bei der die konstante Differenz sehr klein zu denken ist. Auf diesen Punkt kommt die Betrachtung später zurück.

Die Linien

$$\tan\alpha = \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{r_2^3 y + r_1^3 y}{r_2^3(x+1)+r_1^3(x-1)} = \gamma$$

sind Linien konstanter Anziehungsrichtung. Legt man also eine Schar paralleler Tangenten an die Schar der Niveaulinien, so erhält man diese Art von Kurven, deren Bedeutung gleichfalls noch einmal zur Sprache kommt.

Denkt man sich die Punkte M_1 und M_2 mit gleichen Mengen von positivem Magnetismus (bezw. Elektrizität) geladen, so würde eine kleine Magnetnadel sich überall in der Richtung der Resultante einstellen, wobei von dem störenden Erdmagnetismus jetzt abzusehen ist. Der eine Pol unterliegt nämlich der Wirkung der konstruierten Resultante, der andere einer entgegengesetzt zu zeichnenden Resultante. Es giebt eine Lage stabilen und eine Lage labilen Gleichgewichts.

Denkt man sich die Nadel senkrecht gegen die Resultante gestellt, so ist das statische Moment des wirkenden Kräftepaares (ein solches wirkt bei sehr kleiner Nadel, da dann die beiden Resultanten gleich und parallel, aber entgegengesetzt sind) ein Maximum. Die Nadel hat in Bezug auf ihren Drehungspunkt ein bestimmtes Trägheitsmoment. Die Schwingungsdauer der Nadel ist (kleine Schwingungen vorausgesetzt)

$$t = \pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{größtes statisches Moment}}} = \pi \sqrt{\frac{T}{M}},$$

was dem Gesetze $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für das mathematische Pendel, dem Gesetze $t = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}}$ für das physische Pendel entspricht.

Die Normalen der Niveaulinien geben also die Stellung der Nadel an, die Kurven $\tan \alpha = \gamma$ verbinden die Stellen gleicher Nadelrichtung, die Kurven $p = c$ dagegen verbinden die Stellen gleichen Maximalmoments, d. h. die Stellen gleicher Intensität und gleicher Schwingungsdauer miteinander. (Ein Magnetstab von der Länge l habe Pole von der Ladung $\pm m$, dann nennt man ml das magnetische Moment des Stabes. Schwingt er horizontal im homogenen Felde, z. B. in dem des Erdmagnetismus, so ist bei der Feldstärke F das gröfste Drehmoment gleich Fml, also die Schwingungsdauer $t = \pi \sqrt{\frac{T}{Fml}}$.)

So erhält man einen vorläufigen Einblick in die Gesetze des zusammengesetzten magnetischen und elektrischen Feldes. An die bekannten Versuche mit Eisenfeilspänen braucht nur erinnert zu werden. Jedes Teilchen wird polarisiert und ordnet sich so ein, dafs die gröfste Länge in die Kraftlinie fällt. Durch leises Schütteln entsteht in den Kraftlinien gewissermafsen eine Kette kleiner Magnete. Das Nötige darüber findet man in den Lehrbüchern der Physik.

88) Konstruktion und Gleichung der Kraftlinien für das symmetrische Zweipunktsystem.

Bezeichnet man die Kurven, welche das System der Niveaulinien senkrecht durchsetzen, als die Kraftlinien des Problems, weil sie für jede Stelle die Richtung der Resultante (vergl. Stellung der Magnetnadel) angeben, so ist diese Definition praktisch ohne weiteres klar.

Nach obigem erhielt man die Niveaukurven des Problems durch die Diagonalkurven der potentiell gleichwertigen Niveauringe der beiden Einzelprobleme. Es steht zu vermuten, dafs die Kraftlinien des Problems sich aus den Diagonalkurven der von den potentiell gleichwertigen Kraftlinien der Einzelprobleme gebildeten Vierecke ergeben. Diese in der Regel für hinreichend gehaltene Vermutung bedarf des Beweises, der erst weiter unten gegeben werden soll.