Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

88) Konstruktion und Gleichung der Kraftlinien für das symmetrische Zweipunktproblem.

heitsmoment. Die Schwingungsdauer der Nadel ist (kleine Schwingungen vorausgesetzt)

$$\mathrm{t} = \pi \sqrt{\frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{größtes statisches Moment}}} = \pi \sqrt{\frac{T}{M}},$$

was dem Gesetze $\mathrm{t} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ für das mathematische Pendel, dem Gesetze $\mathrm{t} = \pi \sqrt{\frac{T}{gM}}$ für das physische Pendel entspricht.

Die Normalen der Niveaulinien geben also die Stellung der Nadel an, die Kurven $\tan \alpha = \gamma$ verbinden die Stellen gleicher Nadelrichtung, die Kurven $p = c$ dagegen verbinden die Stellen gleichen Maximalmoments, d. h. die Stellen gleicher Intensität und gleicher Schwingungsdauer miteinander. (Ein Magnetstab von der Länge l habe Pole von der Ladung $\pm m$, dann nennt man ml das magnetische Moment des Stabes. Schwingt er horizontal im homogenen Felde, z. B. in dem des Erdmagnetismus, so ist bei der Feldstärke F das gröfste Drehmoment gleich Fml, also die Schwingungsdauer $t = \pi \sqrt{\frac{T}{Fml}}$.)

So erhält man einen vorläufigen Einblick in die Gesetze des zusammengesetzten magnetischen und elektrischen Feldes. An die bekannten Versuche mit Eisenfeilspänen braucht nur erinnert zu werden. Jedes Teilchen wird polarisiert und ordnet sich so ein, dafs die gröfste Länge in die Kraftlinie fällt. Durch leises Schütteln entsteht in den Kraftlinien gewissermafsen eine Kette kleiner Magnete. Das Nötige darüber findet man in den Lehrbüchern der Physik.

88) Konstruktion und Gleichung der Kraftlinien für das symmetrische Zweipunktsystem.

Bezeichnet man die Kurven, welche das System der Niveaulinien senkrecht durchsetzen, als die Kraftlinien des Problems, weil sie für jede Stelle die Richtung der Resultante (vergl. Stellung der Magnetnadel) angeben, so ist diese Definition praktisch ohne weiteres klar.

Nach obigem erhielt man die Niveaukurven des Problems durch die Diagonalkurven der potentiell gleichwertigen Niveauringe der beiden Einzelprobleme. Es steht zu vermuten, dafs die Kraftlinien des Problems sich aus den Diagonalkurven der von den potentiell gleichwertigen Kraftlinien der Einzelprobleme gebildeten Vierecke ergeben. Diese in der Regel für hinreichend gehaltene Vermutung bedarf des Beweises, der erst weiter unten gegeben werden soll.

Nach Nr. 56 erhält man die gleichwertigen Strahlen des Einpunkt-Problems mit Hilfe der Gleichung

$$\cos \vartheta_1 = c_1,$$

indem man c die Werte einer arithmetischen Reihe, z. B.

$$0, \pm\frac{1}{n}, \pm\frac{2}{n}, \pm\frac{3}{n}, \pm\frac{4}{n}, \ldots$$

annehmen läſst, was in Figur 43 dargestellt war. Dies gelte für den Punkt M_1. Ebenso mache man es mit dem Punkte M_2 und der Gleichung

$$\cos \vartheta_2 = c_2.$$

Läſst man nun schrittweise in dem ersten Strahlenbüschel $\cos \vartheta_1$ um je $\frac{1}{n}$ abnehmen, im andern $\cos \vartheta_2$ um denselben Wert zunehmen, so bleibt die Summe

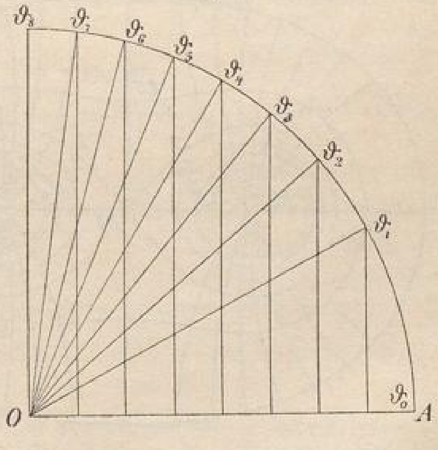
$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c_1 + c_2 = c$$

eine konstante Gröſse, und dem entsprechen die Diagonalkurven der Vierecke, die durch die beiden Strahlenbüschel bestimmt werden. Die Gleichung dieser Diagonalkurven ist also

$$\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = c$$

und es steht zu vermuten, daſs diese zugleich die Kraftlinien des Problems sind. In Fig. 65 und 70 sind beide Arten von Diagonalkurven dargestellt. Fig. 64 giebt einen der Quadranten für jeden der Punkte M_1 und M_2 mit dem zugehörigen Strahlenbüschel an. Man vollende die Zeichnung und ziehe die Diagonalkurven der entstehenden Vierecke, um das Gesuchte mit beliebiger Genauigkeit zu erhalten.

Fig. 64.



Die Konstruktion mit Hilfe der beiden Strahlenbüschel reicht aus. Man kann aber auch folgendermaſsen verfahren.

In Fig. 60 sei $A_1 A_2 = c$ (jedoch < 2). Legt man den Teilpunkt P beliebig, nur mit der Einschränkung, daſs jeder Teil < 1 ist, so läſst sich wie früher $A_1 P$ und $A_2 P$ als OB_1 und OB_2 in den Einheitskreis eintragen, jedoch dort als Cosinuslinie für die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 auffassen, die durch Verbindung der Lotpunkte C_1 und C_2 mit O entstehen. Durch die festen Punkte M_1 und M_2 lege man Parallele zu OC_1 und OC_2. Ihr Schnittpunkt giebt einen Punkt der Kurve

$$\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c.$$

Mit Hilfe beliebiger anderer Teilpunkte P erhält man weitere Punkte derselben Kurve.

Die Gleichung der neuen Kurvengruppe läſst sich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{y}{r_1} + \frac{y}{r_2} = c$$

oder

$$y = \frac{c r_1 r_2}{r_1 + r_2},$$

d. h., wenn die Massenpunkte in die Punkte ± 1 der X-Achse verlegt werden

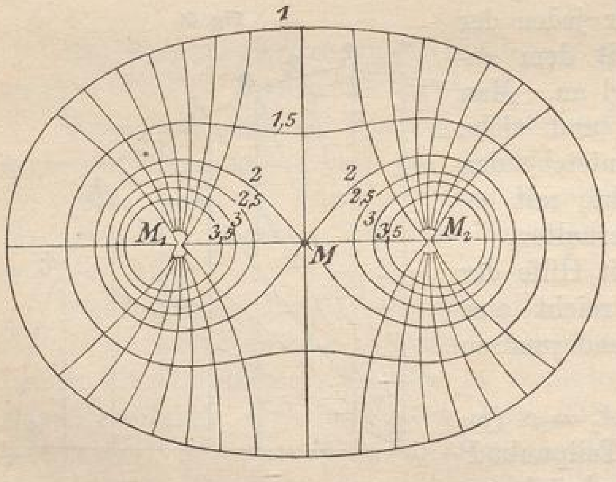
$$y = c \cdot \frac{\sqrt{[(x+1)^2 + y^2]\cdot[(x-1)^2+y^2]}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

oder

$$\frac{y}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} - c = 0.$$

In Figur 65 sind die Kurven im Verein mit den Niveaulinien dargestellt.

Fig. 65.



Kann nun nachgewiesen werden, daſs diese Kurven die Orthogonalkurven der Niveaulinien sind, so ist der Beweis dafür geliefert, daſs sie in der That die Kraftlinien darstellen. Geometrisch ist dies auf elementarem Wege nur umständlich zu zeigen. Um zum Ziele zu kommen, ziehe man die folgenden mechanischen Hilfsaufgaben heran, die auch aus anderen Gründen von Interesse sind.