Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

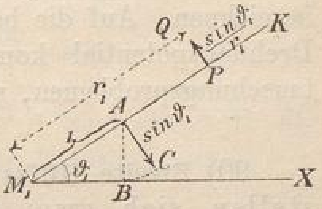
89) Mechanische Hilfsaufgabe über das Drehungspotential

89) Mechanische Hilfsaufgabe und das Drehungspotential.

Der durch M_1 gehende Vektor M_1K soll aus der Lage der positiven X-Achse nach der Richtung der positiven Y-Achse hin gedreht werden, jedoch soll dabei ein Widerstand überwunden werden, dessen Moment für jede Lage ϑ des Vektors den Wert $\sin\vartheta_1$ hat. Die zum Drehen nötige Arbeit soll berechnet und graphisch dargestellt werden.

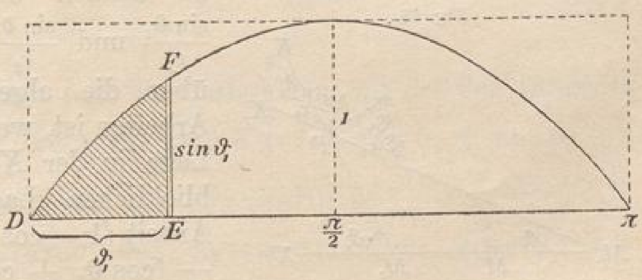
Auflösung. In Figur 66 sei M_1K der Vektor in der Lage ϑ_1 und $M_1A = 1$, so dafs $AB = \sin\vartheta_1 = AC$ ist. Die senkrecht gegen M_1K gerichtete Kraft $AC = \sin\vartheta_1$ hat in Bezug auf den Drehungspunkt M_1 das statische Moment $1 \cdot \sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_1$. Unten wird die zur Überwindung desselben nötige Kraft $PQ = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ für die beliebige Entfernung $M_1P = r_1$ gebraucht. Ihre Konstruktion ergiebt sich aus dem Hebelgesetz $r_1 : 1 = AC : PQ$. Die Arbeit wird durch die Hebelumsetzung nicht geändert, ist also für jeden Radius r_1 dieselbe.

Fig. 66.



Man erhält ihre graphische Darstellung, indem man die Peripherie des Einheits-Halbkreises gestreckt als Gerade zeichnet und für jeden Abstand $DE = \vartheta_1$ das Lot $EF = \sin\vartheta_1$ errichtet. Die Trapezfläche zwischen zwei Nachbarloten stellt dann die für ihren Abstand nötige Arbeit dar. Die Arbeit, die zur Drehung um den Bogen $\vartheta_1 = DE$ nötig ist, wird also durch die Fläche DEF dargestellt. Die gezeichnete Kurve ist bekanntlich eine Sinuskurve. Sowohl stereometrisch (schräger Cylinderschnitt) als auch durch Reihenberechnung läfst sich elementar zeigen, dafs die Fläche $DEF = \cos 0 - \cos\vartheta_1 = 1 - \cos\vartheta_1$ ist. Vgl. Method. Lehrbuch III. Denselben Wert hat also die zu berechnende Arbeit. Der Weg von P ist dabei vollständig gleichgültig. Um aus einer Lage ϑ_1' in eine Lage ϑ_1 zu gelangen, ist die Arbeit $(1 - \cos\vartheta_1) - (1 - \cos\vartheta_1') = \cos\vartheta_1' - \cos\vartheta_1$ nötig. Ist $\vartheta_1' = 90^0$, so ist die nötige Arbeit gleich $\cos\vartheta_1$. Sie ist negativ oder positiv, je nachdem die Bewegung des Vektors eine

Fig. 67.



links- oder rechtsdrehende ist. Dabei ist der Widerstand als aktive Kraft zu betrachten. Jeder Vektor ist als eine Niveaulinie des Problems anzusehen, denn die Bewegung auf ihm selbst erfordert die Arbeit Null. Die Kraftlinien sind überall senkrecht gegen die Radien gerichtet, also Kreise. Im Verhältnis zum Newtonschen Anziehungsprobleme sind demnach die Kraftlinien und die Niveaulinien vertauscht worden.

Es findet nun folgende Analogie mit dem gewöhnlichen Potentialprobleme statt. Dort war $\frac{1}{r^2}$ die Anziehung oder der Widerstand, $\frac{1}{r}$ das Potential, d. h. die Arbeit, die dazu nötig ist, die Masseneinheit aus der Entfernung r in unendlich grofse Entfernung zu versetzen. Hier dagegen ist das Moment des Widerstandes gleich $\sin \vartheta$, die Arbeit aber, die nötig ist, den Vektor aus der Lage ϑ in die Lage 90^0 zu versetzen, ist gleich $\cos \vartheta$. Dieser Ausdruck steht also zu $\sin \vartheta$ in derselben Beziehung, wie $\frac{1}{r}$ zu $\frac{1}{r^2}$, man kann ihn als das entsprechende Potential, z. B. als das Drehungspotential bezeichnen. Auf die bedeutungsvolle Analogie zwischen Potential und Drehungspotential kommen wir unten, bei den sogenannten Vertauschungsproblemen, noch einmal zurück.

90) **Zweite Hilfsaufgabe.** Der Bewegung eines Punktes P stellen sich zwei Widerstandsmomente $\sin \vartheta_1$ und $\sin \vartheta_2$ entgegen, die sich auf Vektoren r_1 und r_2 beziehen, die um die festen Punkte M_1 und M_2 der X-Achse drehbar sind. Die zur Bewegung nötige Arbeit soll für beliebige Wege von P bestimmt werden.

Auflösung. Ist $M_1 P = r_1$, und $MP = r_2$, so sind die zu überwindenden Kräfte senkrecht gegen die Vektoren angebracht zu denken und ihre Gröfsen sind $\frac{\sin \vartheta_1}{r_1}$ und $\frac{\sin \vartheta_2}{r_2}$. Nach dem Satze über die algebraische Addition der Arbeiten ist, wenn P aus irgend welcher Lage in der X-Achse nach der augenblicklichen Lage gelangen soll, die Arbeit $(1 - \cos \vartheta_1) + (1 - \cos \vartheta_2) = 2 - (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$ nötig. Um aus einer Lage $\vartheta_1', \vartheta_2'$ in eine Lage ϑ_1, ϑ_2 zu gelangen, bedarf es der Arbeit $(2 - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) - (2 - \cos \vartheta_1' - \cos \vartheta_2') = (\cos \vartheta_1' + \cos \vartheta_2') - (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$. Für die Lage in der Mittelsenkrechten ist $\cos \vartheta_1' + \cos \vartheta_2' = 0$, um also von dort

Fig. 68.