Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

90) Addition zweier Drehungspotentiale

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

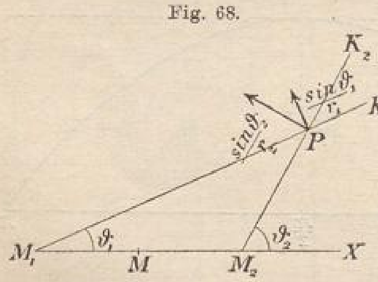
links- oder rechtsdrehende ist. Dabei ist der Widerstand als aktive Kraft zu betrachten. Jeder Vektor ist als eine Niveaulinie des Problems anzusehen, denn die Bewegung auf ihm selbst erfordert die Arbeit Null. Die Kraftlinien sind überall senkrecht gegen die Radien gerichtet, also Kreise. Im Verhältnis zum Newtonschen Anziehungsprobleme sind demnach die Kraftlinien und die Niveaulinien vertauscht worden.

Es findet nun folgende Analogie mit dem gewöhnlichen Potentialprobleme statt. Dort war $\frac{1}{r^2}$ die Anziehung oder der Widerstand, $\frac{1}{r}$ das Potential, d. h. die Arbeit, die dazu nötig ist, die Masseneinheit aus der Entfernung r in unendlich grofse Entfernung zu versetzen. Hier dagegen ist das Moment des Widerstandes gleich $\sin\vartheta$, die Arbeit aber, die nötig ist, den Vektor aus der Lage ϑ in die Lage 90^0 zu versetzen, ist gleich $\cos\vartheta$. Dieser Ausdruck steht also zu $\sin\vartheta$ in derselben Beziehung, wie $\frac{1}{r}$ zu $\frac{1}{r^2}$, man kann ihn als das entsprechende Potential, z. B. als das Drehungspotential bezeichnen. Auf die bedeutungsvolle Analogie zwischen Potential und Drehungspotential kommen wir unten, bei den sogenannten Vertauschungsproblemen, noch einmal zurück.

90) **Zweite Hilfsaufgabe.** Der Bewegung eines Punktes P stellen sich zwei Widerstandsmomente $\sin\vartheta_1$ und $\sin\vartheta_2$ entgegen, die sich auf Vektoren r_1 und r_2 beziehen, die um die festen Punkte M_1 und M_2 der X-Achse drehbar sind. Die zur Bewegung nötige Arbeit soll für beliebige Wege von P bestimmt werden.

Auflösung. Ist $M_1P = r_1$, und $MP = r_2$, so sind die zu überwindenden Kräfte senkrecht gegen die Vektoren angebracht zu denken und ihre Gröfsen sind $\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ und $\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}$. Nach dem Satze über die algebraische Addition der Arbeiten ist, wenn P aus irgend welcher Lage in der X-Achse nach der augenblicklichen Lage gelangen soll, die Arbeit $(1-\cos\vartheta_1)+(1-\cos\vartheta_2) = 2 - (\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)$ nötig. Um aus einer Lage ϑ_1', ϑ_2' in eine Lage ϑ_1, ϑ_2 zu gelangen, bedarf es der Arbeit $(2-\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2)-(2-\cos\vartheta_1' - \cos\vartheta_2') = (\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2') - (\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2)$. Für die Lage in der Mittelsenkrechten ist $\cos\vartheta_1' + \cos\vartheta_2' = 0$, um also von dort

Fig. 68.



nach der Lage ϑ_1, ϑ_2 zu gelangen, ist die Arbeit $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2$ nötig.

Ist für zwei verschiedene Lagen die Summe der Cosinus dieselbe, so ist zur Bewegung von der einen zur andern die Arbeit Null nötig. Folglich: Die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ sind die Niveaulinien dieses Problems.

Damit haben die oben konstruierten Kurven eine bestimmte Deutung erhalten, die eigentlich beabsichtigte ergiebt sich aber aus folgender Aufgabe.

91) **Aufgabe.** Die Richtungen der Normalen und Tangenten für die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ zu bestimmen.

Auflösung. Um die Normale zu bestimmen, setze man die in P angreifenden Kräfte $\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ und $\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}$ nach dem Parallelogramm zusammen. Da uns jetzt nur die Richtung interessiert, gehe man von ihren Komponenten

$$\xi_1 = -\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}\sin\vartheta_1, \quad \eta_1 = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1}\cos\vartheta_1$$

$$\xi_2 = -\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}\sin\vartheta_2, \quad \eta_2 = \frac{\sin\vartheta_2}{r_2}\cos\vartheta_2$$

aus. (Dies giebt $p = \sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2}$.) Sind nun z. B. M_1 und M_2 die Punkte ± 1, so bestimmt sich die Richtung aus

$$\tan\gamma = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\xi_1 + \xi_2} = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2}{-\frac{1}{r_1}\sin^2\vartheta_1 - \frac{1}{r_2}\sin^2\vartheta_2} = -\frac{\frac{y(x+1)}{r_1^3} + \frac{y(x-1)}{r_2^3}}{\frac{y^2}{r_1^3} + \frac{y^2}{r_2^3}}$$

oder

$$\tan\gamma = -\frac{\frac{x+1}{r_1^3} + \frac{x-1}{r_3^2}}{\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3}} = -\frac{1}{\tan\alpha} = \tan\beta.$$

Die Richtung der Normalen fällt also zusammen mit der der Tangente der Kurven $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$. Folglich: Die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 - c$ sind die Orthogonalkurven der Niveaulinien $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$, d. h. sie sind die Kraftlinien des symmetrischen Zweipunktsystems.*)

*) Einen andern Beweisgang findet man in der während des Druckes erschienenen zweiten Auflage von Börner, Lehrbuch der Physik für Realgymn. etc. auf Seite 376.