Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

91) Richtung der Normalen und Tangenten der Kraftlinien für das Zweipunktproblem

nach der Lage ϑ_1, ϑ_2 zu gelangen, ist die Arbeit $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2$ nötig.

Ist für zwei verschiedene Lagen die Summe der Cosinus dieselbe, so ist zur Bewegung von der einen zur andern die Arbeit Null nötig. Folglich: Die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ sind die Niveaulinien dieses Problems.

Damit haben die oben konstruierten Kurven eine bestimmte Deutung erhalten, die eigentlich beabsichtigte ergiebt sich aber aus folgender Aufgabe.

91) **Aufgabe.** Die Richtungen der Normalen und Tangenten für die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 = c$ zu bestimmen.

Auflösung. Um die Normale zu bestimmen, setze man die in P angreifenden Kräfte $\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}$ und $\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}$ nach dem Parallelogramm zusammen. Da uns jetzt nur die Richtung interessiert, gehe man von ihren Komponenten

$$\xi_1 = -\frac{\sin\vartheta_1}{r_1}\sin\vartheta_1, \quad \eta_1 = \frac{\sin\vartheta_1}{r_1}\cos\vartheta_1$$

$$\xi_2 = -\frac{\sin\vartheta_2}{r_2}\sin\vartheta_2, \quad \eta_2 = \frac{\sin\vartheta_2}{r_2}\cos\vartheta_2$$

aus. (Dies giebt $p = \sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (\eta_1 + \eta_2)^2}$.) Sind nun z. B. M_1 und M_2 die Punkte ± 1, so bestimmt sich die Richtung aus

$$\tan\gamma = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\xi_1 + \xi_2} = \frac{\frac{1}{r_1}\sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \frac{1}{r_2}\sin\vartheta_2\cos\vartheta_2}{-\frac{1}{r_1}\sin^2\vartheta_1 - \frac{1}{r_2}\sin^2\vartheta_2} = -\frac{\frac{y(x+1)}{r_1^3} + \frac{y(x-1)}{r_2^3}}{\frac{y^2}{r_1^3} + \frac{y^2}{r_2^3}}$$

oder

$$\tan\gamma = -\frac{\frac{x+1}{r_1^3} + \frac{x-1}{r_3^2}}{\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3}} = -\frac{1}{\tan\alpha} = \tan\beta.$$

Die Richtung der Normalen fällt also zusammen mit der der Tangente der Kurven $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$. Folglich: Die Kurven $\cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_2 - c$ sind die Orthogonalkurven der Niveaulinien $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = c$, d. h. sie sind die Kraftlinien des symmetrischen Zweipunktsystems.*)

*) Einen andern Beweisgang findet man in der während des Druckes erschienenen zweiten Auflage von Börner, Lehrbuch der Physik für Realgymn. etc. auf Seite 376.