Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

93) Der Fall gleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten

urn:nbn:de:hbz:466:1-77934

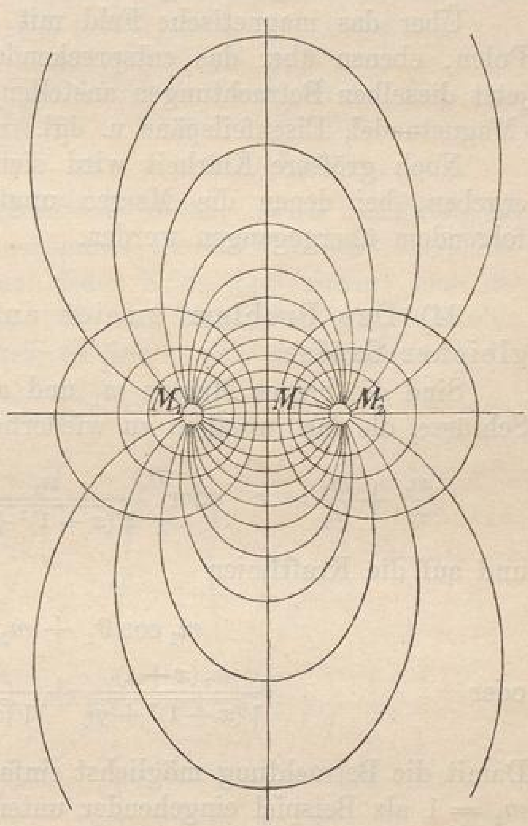
93) Der Fall gleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten.

Man denke sich die Punkte ± 1 der X-Achse mit Elektrizitätsmengen ± 1 geladen, wobei das Vorzeichen die Ungleichartigkeit bedeuten soll. Dann wird der mit -1 geladene freie Punkt von M_1 mit der Kraft $\frac{1}{r_1^2}$ angezogen, von M_2 mit $\frac{1}{r_2^2}$ abgestofsen. Die Einzelpotentiale sind $\frac{1}{r_1}$ und $-\frac{1}{r_2}$. Nach denselben Schlüssen wie vorher erhalten die Gleichungen der Niveau- und Kraftflächen die Formen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} = c \\ \text{oder} \\ \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = c \end{array}\right\} \quad (5),$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = c \\ \text{oder} \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} \\ -\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = c \end{array}\right\} \quad (6).$$

Fig. 70.



Die Konstruktion geschieht entweder mit Hilfe der anderen Gruppen von Diagonalkurven der Einzelsysteme, oder, der zweiten Methode entsprechend, mit Hilfe einer Linie $A_1 A_2$, nur ist der Teilpunkt P aufserhalb zu wählen. Die zweifache Symmetrie ist selbstverständlich. Mit Ausnahme der beiden Symmetrieachsen verlaufen alle Kurven als geschlossene Ovale im Endlichen, so dafs von den eigentlichen Kurven keine eine Asymptote besitzt. Die Grenzfälle

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0, \quad \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = 0, \quad \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = 2$$

führen auf die Geraden des Netzes.

Nimmt in Gl. (5) c die Werte einer arithmetischen Reihe, z. B. 0, 1, 2, 3 ... an, während in Gl. (6) c Werten wie

$$0, \pm\frac{2}{n}, \pm\frac{4}{n}, \pm\frac{6}{n}, \cdots \pm\frac{2n}{n}$$

entspricht, so erhält man die Einteilung in gleichwertige Felder. In M_1 und M_2 ist für jede Kraftlinie $\cos\vartheta_1 - \cos(180^0 - \vartheta_1) = 2\cos\vartheta_1 = c$, also der Schnittwinkel dort aus $\cos\vartheta_1 = \frac{c}{2}$ und $\cos\vartheta_2 = -\frac{c}{2}$ zu bestimmen. Die Cosinus der Schnittwinkel in M_1 und M_2 folgen somit einer arithmetischen Reihe. Die Tangenten in diesen Punkten würden daher auf der unendlich grofsen Kugel, die hier keine Bedeutung hat, flächengleiche Zonen geben. Dies erleichtert das Zeichnen des Kurvensystems.

Über das magnetische Feld mit gleichen und entgegengesetzten Polen, ebenso über das entsprechende elektrische Feld, lassen sich jetzt dieselben Betrachtungen anstellen, wie bei dem vorigen Problem. (Magnetnadel, Eisenfeilspäne u. dgl.)

Noch gröfsere Klarheit wird sich bei der Behandlung der Fälle ergeben, bei denen die Massen ungleich sind. Zu diesen soll in folgendem übergegangen werden.

94) Das Problem zweier anziehender Massen von ungleicher Gröfse.

Sind die beiden Massen m_1 und m_2 ungleich, so führen dieselben Schlüsse, die fast wörtlich zu wiederholen sind, auf die Niveauflächen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c$$

und auf die Kraftlinien

$$\left.\begin{aligned} m_1\cos\vartheta_1 + m_2\cos\vartheta_2 = c \\ \text{oder} \quad \frac{m_1(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{m_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \end{aligned}\right\}.$$

Damit die Betrachtung möglichst einfach werde, soll der Fall $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ als Beispiel eingehender untersucht werden.

Erste Konstruktion. Für den Punkt M_1 denke man sich zunächst die koncentrische Kreisschar $\frac{2}{r_1} = c_1$ so gezeichnet, dafs c z. B. der arithmetischen Reihe $0, d, 2d, 3d, \ldots$ folgt, für M_2 die Kreisschar $\frac{1}{r_2} = c_2$, wobei c_2 derselben arithmetischen Reihe folgt. Zieht man diejenige Gruppe von Diagonalkurven, die in der einen Kreisschar nach innen, in der andern nach aufsen geht, so heben sich von Punkt zu Punkt zwei entgegengesetzte Differenzen auf, und der Ausdruck