Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

94) Das Problem zweier anziehender Massen von ungleicher Grösse

$$0, \pm\frac{2}{n}, \pm\frac{4}{n}, \pm\frac{6}{n}, \cdots \pm\frac{2n}{n}$$

entspricht, so erhält man die Einteilung in gleichwertige Felder. In M_1 und M_2 ist für jede Kraftlinie $\cos\vartheta_1 - \cos(180^0 - \vartheta_1) = 2\cos\vartheta_1 = c$, also der Schnittwinkel dort aus $\cos\vartheta_1 = \frac{c}{2}$ und $\cos\vartheta_2 = -\frac{c}{2}$ zu bestimmen. Die Cosinus der Schnittwinkel in M_1 und M_2 folgen somit einer arithmetischen Reihe. Die Tangenten in diesen Punkten würden daher auf der unendlich grofsen Kugel, die hier keine Bedeutung hat, flächengleiche Zonen geben. Dies erleichtert das Zeichnen des Kurvensystems.

Über das magnetische Feld mit gleichen und entgegengesetzten Polen, ebenso über das entsprechende elektrische Feld, lassen sich jetzt dieselben Betrachtungen anstellen, wie bei dem vorigen Problem. (Magnetnadel, Eisenfeilspäne u. dgl.)

Noch gröfsere Klarheit wird sich bei der Behandlung der Fälle ergeben, bei denen die Massen ungleich sind. Zu diesen soll in folgendem übergegangen werden.

94) Das Problem zweier anziehender Massen von ungleicher Gröfse.

Sind die beiden Massen m_1 und m_2 ungleich, so führen dieselben Schlüsse, die fast wörtlich zu wiederholen sind, auf die Niveauflächen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c$$

und auf die Kraftlinien

$$\left.\begin{aligned} m_1\cos\vartheta_1 + m_2\cos\vartheta_2 &= c \\ \text{oder} \qquad \frac{m_1(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{m_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} &= c \end{aligned}\right\}.$$

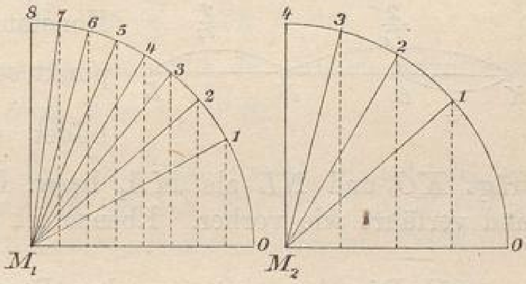
Damit die Betrachtung möglichst einfach werde, soll der Fall $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ als Beispiel eingehender untersucht werden.

Erste Konstruktion. Für den Punkt M_1 denke man sich zunächst die koncentrische Kreisschar $\frac{2}{r_1} = c_1$ so gezeichnet, dafs c z. B. der arithmetischen Reihe $0, d, 2d, 3d, \ldots$ folgt, für M_2 die Kreisschar $\frac{1}{r_2} = c_2$, wobei c_2 derselben arithmetischen Reihe folgt. Zieht man diejenige Gruppe von Diagonalkurven, die in der einen Kreisschar nach innen, in der andern nach aufsen geht, so heben sich von Punkt zu Punkt zwei entgegengesetzte Differenzen auf, und der Ausdruck

$\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ bleibt eine konstante Gröfse c, wie es in dem früher behandelten Falle gleicher Massen geschah. Dies giebt die Niveaulinien.

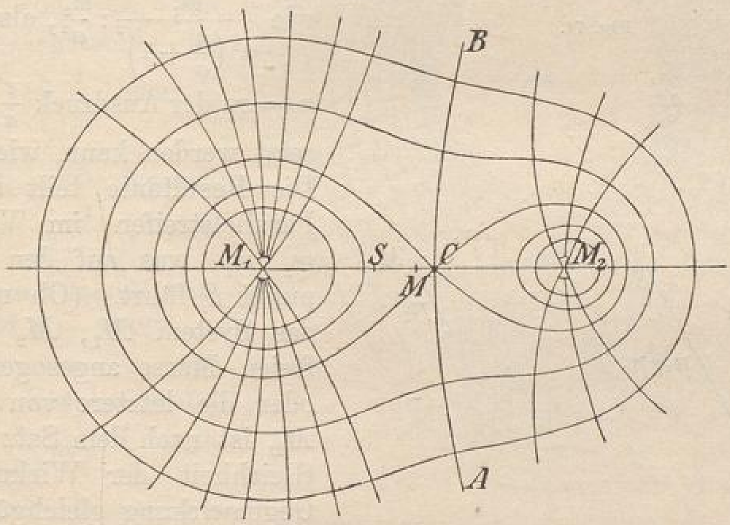
Die Schar M_1 enthält dieselben Kreise, wie die Schar M_2, aber aufserdem in jedem Ringe noch einen durch Interpolation gefundenen Kreis, im ganzen also die doppelte Zahl. Die Schar M_1 kann man sich also aus zwei Scharen bestehend denken, deren jede der Masse 1 entspricht, von denen aber die zweite mit einem anderen, durch Interpolation gefundenen Radius beginnt. Vgl. Fig. 11 und 12.

Fig. 71.



Ebenso verfahre man mit den Strahlenbüscheln. Bei M_1 folge $2 \cos \vartheta_1 = c_1$ einer arithmetischen Reihe, bei M_2 folge $\cos \vartheta_2 = c_2$ derselben arithmetischen Reihe. In der Zeichnung ist dies durch die Einteilung des horizontalen Radius in 8 bezw. 4 gleiche Teile erfolgt. Vervollständigt man jeden Kreis und zeichnet man die eine Gruppe von Diagonalkurven, die das eine Büschel geradläufig, das andere rückläufig durchkreuzt, so findet man die Kraftlinien.

Fig. 72.

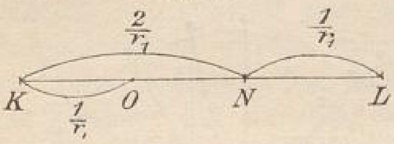


Durch Rotation um $M_1 M_2$ erhält man die Niveauflächen und Kraftflächen und durch Einführung von Meridianschnitten, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, die potentiell gleichwertige Zelleneinteilung des Raumes. In Fig. 72 ist das System skizziert.

Hätte es sich um $m_2 : m_1 = 3 : 1$ gehandelt, so hätte man bei M_1 die dreifache Anzahl von Kraftröhren wie bei M_2 erhalten. Allgemein handelt es sich um das Verhältnis $m_2 : m_1$ bei den Massen wie bei den Kraftröhren. Damit ist eine der wichtigsten von Faradays Behauptungen bewiesen.

Zweite Konstruktionsmethode. Man verfahre ähnlich, wie in Nr. 82.

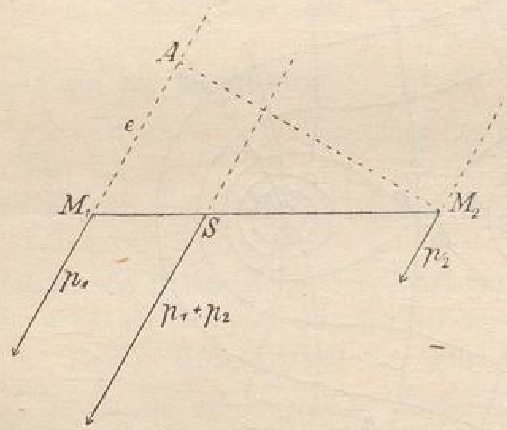
Fig. 73.



Ist $KL = c$, Fig. 73, die gewählte Konstante und N ein beliebiger Teilpunkt, so setzt man $KN = \frac{2}{r_1}$, $NL = \frac{1}{r_2}$, bildet durch Halbierung $KO = \frac{1}{r_1}$, trägt KO und NL als MA_1 bezw. MA_2 in den Einheitskreis ein und verfährt wie vorher. Ebenso ist es bei den Kraftlinien.

95) Die Asymptoten des Problems. Jede der Kraftlinien hat eine Asymptote, die nach dem im Unendlichen liegenden Schnittpunkte je zweier paralleler Strahlen hin gerichtet ist. Es wird behauptet, jede der Asymptoten gehe durch den Schwerpunkt S der Massen M_1 und M_2, der im Beispiele die Gerade $M_1 M_2$ im Verhältnis $1 : 2$ teilt. Für unendliche Entfernung $a = \infty$ sind nämlich die Kräfte parallel und verhalten sich nach Fig. 74 wie $\frac{m_1}{(e+a)^2} : \frac{m_2}{a^2}$ oder

Fig. 74.



wie $\frac{m_1}{a^2\left(\frac{e}{a}+1\right)^2} : \frac{m_2}{a^2}$, also, da für $a = \infty$ der Ausdruck $\frac{e}{a} = o$ gesetzt werden kann, wie $m_1 : m_2$. Die Resultante teilt also den Parallelstreifen im Verhältnis $m_2 : m_1$, was auf den Schwerpunkt S führt. (Ob man sich das System M_1, M_2 von der freien Masse angezogen denkt, oder die letztere von M_1 und M_2, ist nach dem Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung gleichgültig.)

Da für die Asymptoten gebenden Strahlen $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ ist, so folgt für den unendlichen Punkt jeder Kraftlinie eine Gleichung $2 \cos \vartheta + \cos \vartheta = c$ oder $3 \cos \vartheta = c$, also $\cos \vartheta = \frac{c}{3}$. Dies folgt ebenso, wie c einer arithmetischen Reihe. Die um S zu schlagende un-