Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

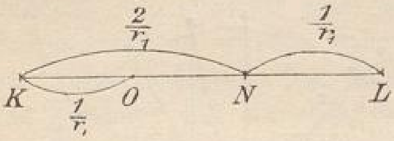
Leipzig, 1898

95) Die Asymptoten dieses Problems

Hätte es sich um $m_2 : m_1 = 3 : 1$ gehandelt, so hätte man bei M_1 die dreifache Anzahl von Kraftröhren wie bei M_2 erhalten. Allgemein handelt es sich um das Verhältnis $m_2 : m_1$ bei den Massen wie bei den Kraftröhren. Damit ist eine der wichtigsten von Faradays Behauptungen bewiesen.

Zweite Konstruktionsmethode. Man verfahre ähnlich, wie in Nr. 82.

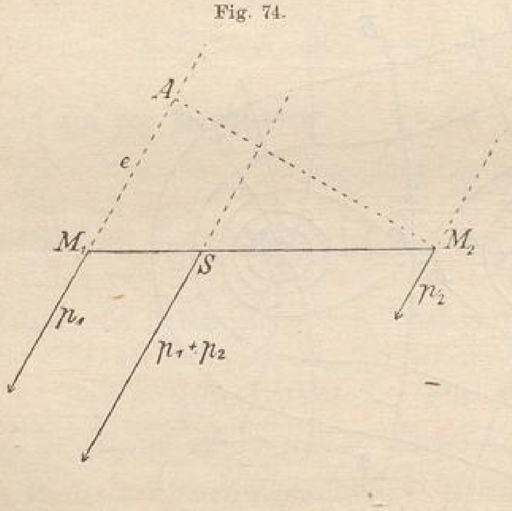
Fig. 73.



Ist $KL = c$, Fig. 73, die gewählte Konstante und N ein beliebiger Teilpunkt, so setzt man $KN = \frac{2}{r_1}$, $NL = \frac{1}{r_2}$, bildet durch Halbierung $KO = \frac{1}{r_1}$, trägt KO und NL als MA_1 bezw. MA_2 in den Einheitskreis ein und verfährt wie vorher. Ebenso ist es bei den Kraftlinien.

95) Die Asymptoten des Problems. Jede der Kraftlinien hat eine Asymptote, die nach dem im Unendlichen liegenden Schnittpunkte je zweier paralleler Strahlen hin gerichtet ist. Es wird behauptet, jede der Asymptoten gehe durch den Schwerpunkt S der Massen M_1 und M_2, der im Beispiele die Gerade $M_1 M_2$ im Verhältnis $1 : 2$ teilt. Für unendliche Entfernung $a = \infty$ sind nämlich die Kräfte parallel und verhalten sich nach Fig. 74 wie $\frac{m_1}{(e+a)^2} : \frac{m_2}{a^2}$ oder

Fig. 74.

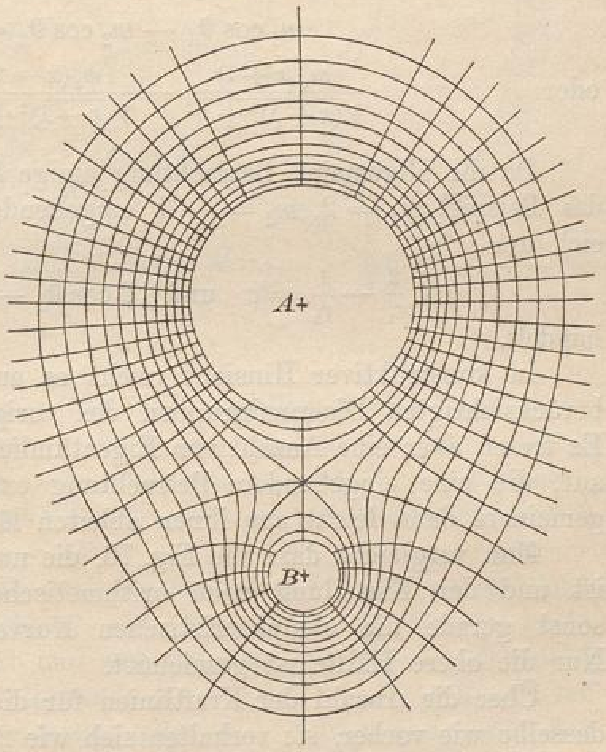


wie $\frac{m_1}{a^2\left(\frac{e}{a}+1\right)^2} : \frac{m_2}{a^2}$, also, da für $a = \infty$ der Ausdruck $\frac{e}{a} = o$ gesetzt werden kann, wie $m_1 : m_2$. Die Resultante teilt also den Parallelstreifen im Verhältnis $m_2 : m_1$, was auf den Schwerpunkt S führt. (Ob man sich das System M_1, M_2 von der freien Masse angezogen denkt, oder die letztere von M_1 und M_2, ist nach dem Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung gleichgültig.)

Da für die Asymptoten gebenden Strahlen $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ ist, so folgt für den unendlichen Punkt jeder Kraftlinie eine Gleichung $2 \cos\vartheta + \cos\vartheta = c$ oder $3 \cos\vartheta = c$, also $\cos\vartheta = \frac{c}{3}$. Dies folgt ebenso, wie c einer arithmetischen Reihe. Die um S zu schlagende unendlich grofse Kugel, die der Asymptoten wegen zu den Niveauflächen gehört, wird also durch die aus den Kraftlinien durch Rotation um $M_1 M_2$ entstehenden Kraftflächen in gleiche Zonen eingeteilt, von denen $\frac{2}{3}$ dem Bereiche von M_1, $\frac{1}{3}$ dem von M_2 zufallen. (Im allgemeinen handelt es sich nicht um das Verhältnis $2:1$, sondern um $m_1 : m_2$.) Denkt man sich also um S einen Kreis geschlagen, und teilt man seinen horizontalen Durchmesser in 3 gleiche Teile ein, so giebt das Lot in dem von M_1 um $\frac{2r}{3}$, von S um $\frac{2r}{3} - r = \frac{r}{3}$ entfernten Teilpunkte den Kreispunkt, nach dem die teilende Asymptote gerichtet ist. Aus $\cos\vartheta = \frac{1}{3}$ folgt $\vartheta = \sim 70^0\,32'$.

96) **Bemerkungen.** Ist in Fig. 72 C der Punkt, in dem die zugehörige Kraftlinie die X-Achse trifft, so dafs $M_1 CB\infty$ und $M_2 CB\infty$ die beiden ausgezeichneten und teilweise zusammenfallenden Kraftlinien sind, so treffen sich in C zugleich die beiden zugespitzten Ovale der Niveaulinien, durch welche die zweiteiligen und die einheitlichen Niveaulinien voneinander geschieden werden. Es handelt sich um die Gleichgewichtsstelle, die durch $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{r_2^2}$ oder $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{(M_1 M_2 - r_1)^2}$ oder endlich $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{(2 - r_1)^2}$ sich so bestimmt, dafs $M_1 C = 1{,}172$, $M_2 C = 0{,}828$ ist.

Fig. 75.



Da man für jede Stelle die Resultante der Kräfte $\frac{2}{r_1^2}$ und $\frac{1}{r_1^2}$ nach Gröfse p und Richtung α leicht berechnen und konstruieren kann, was ganz ebenso wie früher geschieht, so sind auch die Normalen und Tangenten der beiden Kurvenscharen leicht zu berechnen und zu konstruieren. Die Kurven $p = c$ sind die Kurven gleicher Intensität, die Kurven $\tan\alpha = c$ solche gleicher Kraftrichtung.