Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

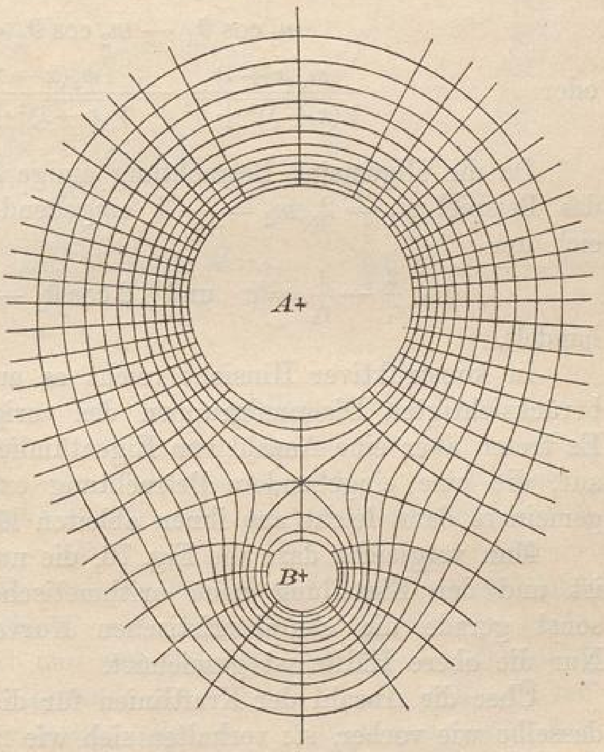
Leipzig, 1898

96) Bemerkungen

endlich grofse Kugel, die der Asymptoten wegen zu den Niveauflächen gehört, wird also durch die aus den Kraftlinien durch Rotation um $M_1 M_2$ entstehenden Kraftflächen in gleiche Zonen eingeteilt, von denen $\frac{2}{3}$ dem Bereiche von M_1, $\frac{1}{3}$ dem von M_2 zufallen. (Im allgemeinen handelt es sich nicht um das Verhältnis $2:1$, sondern um $m_1 : m_2$.) Denkt man sich also um S einen Kreis geschlagen, und teilt man seinen horizontalen Durchmesser in 3 gleiche Teile ein, so giebt das Lot in dem von M_1 um $\frac{2r}{3}$, von S um $\frac{2r}{3} - r = \frac{r}{3}$ entfernten Teilpunkte den Kreispunkt, nach dem die teilende Asymptote gerichtet ist. Aus $\cos\vartheta = \frac{1}{3}$ folgt $\vartheta = \sim 70^0\,32'$.

96) **Bemerkungen.** Ist in Fig. 72 C der Punkt, in dem die zugehörige Kraftlinie die X-Achse trifft, so dafs $M_1 CB\infty$ und $M_2 CB\infty$ die beiden ausgezeichneten und teilweise zusammenfallenden Kraftlinien sind, so treffen sich in C zugleich die beiden zugespitzten Ovale der Niveaulinien, durch welche die zweiteiligen und die einheitlichen Niveaulinien voneinander geschieden werden. Es handelt sich um die Gleichgewichtsstelle, die durch $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{r_2^2}$ oder $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{(M_1 M_2 - r_1)^2}$ oder endlich $\frac{2}{r_1^2} = \frac{1}{(2 - r_1)^2}$ sich so bestimmt, dafs $M_1 C = 1{,}172$, $M_2 C = 0{,}828$ ist.

Fig. 75.



Da man für jede Stelle die Resultante der Kräfte $\frac{2}{r_1^2}$ und $\frac{1}{r_1^2}$ nach Gröfse p und Richtung α leicht berechnen und konstruieren kann, was ganz ebenso wie früher geschieht, so sind auch die Normalen und Tangenten der beiden Kurvenscharen leicht zu berechnen und zu konstruieren. Die Kurven $p = c$ sind die Kurven gleicher Intensität, die Kurven $\tan\alpha = c$ solche gleicher Kraftrichtung.

Über diese Kurven und über das Verhalten der Magnetnadel im magnetischen Felde, über das betreffende elektrische Feld, über die Ozeane bei kugelförmigen Weltkörpern vom Massenverhältnis 2 : 1, die starr miteinander verbunden sind, stelle man dieselben Betrachtungen an, wie vorher.

Fig. 75 stellt den Fall der Ladungen $A = 20$, $B = 5$ nach einer Maxwellschen Zeichnung dar. Die Zahlen bedeuten jedesmal die Anzahl der durch Umdrehung der Figur entstehenden Zonen, die also halb so grofs ist, wie die der gezeichneten Sektoren.

97) Der Fall ungleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten in zwei festen Punkten.

Die früheren Schlüsse führen bei entsprechender Anordnung auf Gleichungen:

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = c \text{ oder } \frac{m_1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \qquad (7),$$

oder

$$\left.\begin{aligned} m_1 \cos\vartheta_1 - m_2 \cos\vartheta_2 = c \\ \frac{m_1(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{m_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = c \end{aligned}\right\} \qquad (8).$$

Da die allgemeine Betrachtung einige Schwierigkeiten bietet, sei das Beispiel $m_1 = 2$, $m_2 = -1$ eingehender dargestellt, so dafs es sich um

$$\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c \quad \text{und} \quad 2\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = c$$

handelt.

In konstruktiver Hinsicht reicht es aus, die beiden noch nicht berücksichtigten Diagonalgruppen des vorigen Systems zu zeichnen. Es treten aber eine Anzahl von Eigentümlichkeiten bei diesen Kurven auf, die eine eingehendere Betrachtung erfordern, da sich das Allgemeinere dann leicht aus ihnen ableiten läfst.

Man vergleiche dazu die Fig. 76, die nur als Skizze zu betrachten ist und der Einteilung nach arithmetischer Reihe nicht folgt, da sonst gerade die charakteristischen Kurven hätten fehlen können. Nur die obere Hälfte ist gezeichnet.

Über die Anzahl der Kraftlinien für die Punkte M_1 und M_2 gilt dasselbe wie vorher, sie verhalten sich wie 2 : 1. Nur die Hälfte geht von M_1 nach M_2, die andere Hälfte geht ins Unendliche und diese hat Asymptoten.

Für die Asymptoten handelt es sich um parallele Strahlen der beiden Büschel, also um $\vartheta_1 = \vartheta_2$, so dafs für die unendlich fernen Punkte der Kraftlinien die Gleichung übergeht in