



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

97) Der Fall ungleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77934](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77934)

Über diese Kurven und über das Verhalten der Magnetnadel im magnetischen Felde, über das betreffende elektrische Feld, über die Ozeane bei kugelförmigen Weltkörpern vom Massenverhältnis 2:1, die starr miteinander verbunden sind, stelle man dieselben Betrachtungen an, wie vorher.

Fig. 75 stellt den Fall der Ladungen $A = 20$, $B = 5$ nach einer Maxwellschen Zeichnung dar. Die Zahlen bedeuten jedesmal die Anzahl der durch Umdrehung der Figur entstehenden Zonen, die also halb so groß ist, wie die der gezeichneten Sektoren.

97) Der Fall ungleicher Mengen ungleichartiger Elektrizitäten in zwei festen Punkten.

Die früheren Schlüsse führen bei entsprechender Anordnung auf Gleichungen:

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = c \quad \text{oder} \quad \frac{m_1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{m_2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = c \quad (7),$$

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} m_1 \cos \vartheta_1 - m_2 \cos \vartheta_2 &= c \\ \frac{m_1(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} - \frac{m_2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} &= c \end{aligned} \right\} \quad (8).$$

Da die allgemeine Betrachtung einige Schwierigkeiten bietet, sei das Beispiel $m_1 = 2$, $m_2 = -1$ eingehender dargestellt, so daß es sich um

$$\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c \quad \text{und} \quad 2 \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 = c$$

handelt.

In konstruktiver Hinsicht reicht es aus, die beiden noch nicht berücksichtigten Diagonalgruppen des vorigen Systems zu zeichnen. Es treten aber eine Anzahl von Eigentümlichkeiten bei diesen Kurven auf, die eine eingehendere Betrachtung erfordern, da sich das Allgemeinere dann leicht aus ihnen ableiten läßt.

Man vergleiche dazu die Fig. 76, die nur als Skizze zu betrachten ist und der Einteilung nach arithmetischer Reihe nicht folgt, da sonst gerade die charakteristischen Kurven hätten fehlen können. Nur die obere Hälfte ist gezeichnet.

Über die Anzahl der Kraftlinien für die Punkte M_1 und M_2 gilt dasselbe wie vorher, sie verhalten sich wie 2:1. Nur die Hälfte geht von M_1 nach M_2 , die andere Hälfte geht ins Unendliche und diese hat Asymptoten.

Für die Asymptoten handelt es sich um parallele Strahlen der beiden Büschel, also um $\vartheta_1 = \vartheta_2$, so daß für die unendlich fernen Punkte der Kraftlinien die Gleichung übergeht in

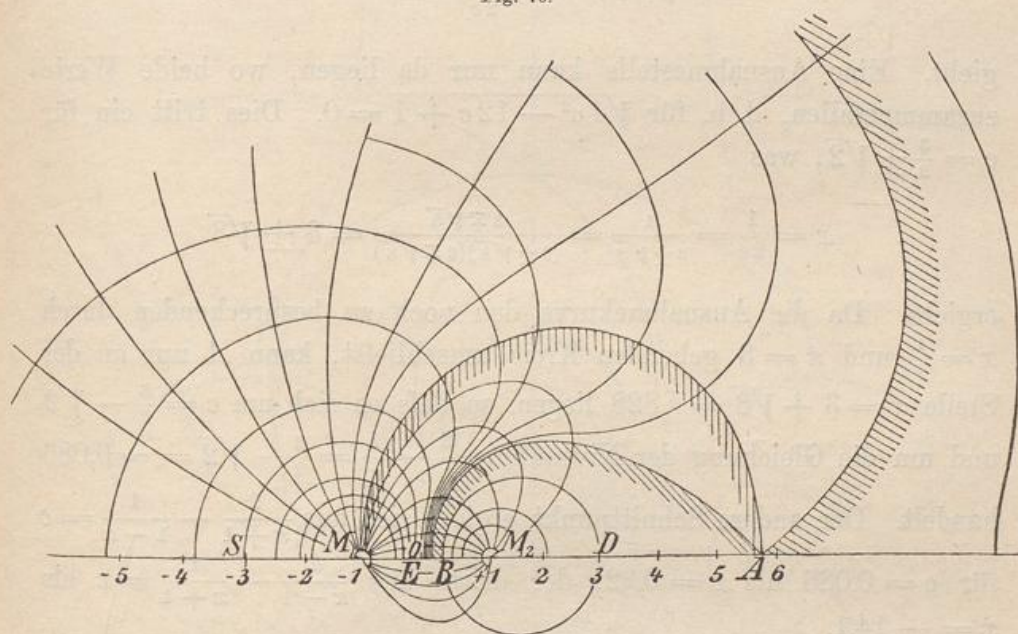
oder in

$$2 \cos \vartheta - \cos \vartheta = c$$

$$\cos \vartheta = c.$$

Diese Asymptoten gehen aus denselben Gründen, wie früher, durch den Schwerpunkt S , der aber außerhalb $M_1 M_2$ liegt, weil in M_1 eine Masse oder Kraft 2, in M_2 eine entgegengesetzte Masse oder Kraft 1 zu denken ist. Dabei ist nach dem Hebelgesetze $SM_1 = \frac{1}{2} SM_2$.

Fig. 76.



Zu den Niveaulinien gehört eine unendlich große Kugel mit S als Mittelpunkt. Lässt man c die Werte einer arithmetischen Reihe $0, d, 2d, 3d, \dots$ annehmen, so erhält man wie früher eine Einteilung dieser Kugel in flächengleiche Streifen, wie die potentiell gleichwertige Einteilung es erfordert.

Zwischen den nach M_2 und den nach dem Unendlichen gehenden Kraftlinien muß, wie früher, eine liegen, die als Grenze beiden Gruppen zugleich angehört und sich dann spaltet. In der Zeichnung ist es die von M_1 nach A gehende Kurve, die bei M senkrecht aufsteigt, bei A senkrecht aufsetzt, sich dort spaltet und einen Arm nach ∞ , den anderen nach M_2 schiebt. In A trifft sie mit einer ausgezeichneten Niveaulinie zusammen, die ebenfalls die Grenzkurve zwischen zwei Gruppen von Niveaulinien ist. Die links davon gezeichneten Niveaulinien umschließen nur den Punkt M , die der andern Gruppe bestehen aus je zwei getrennten Ovalen, von denen das eine

den Punkt M_2 , das andere die beiden Punkte M_1 und M_2 zugleich umschließt. Die Grenzkurve besteht aus zwei zugespitzten Ovalen, die sich in A mit den Spitzen berühren, nur ist die eine Spitze als konvex, die andere als konkav aufzufassen.

Besonders wünschenswert ist die Bestimmung von A . Für $y=0$ geht $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = c$ über in $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = c$, was

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{4c^2 - 12c + 1}}{2c}$$

gibt. Eine Ausnahmestelle kann nur da liegen, wo beide Werte zusammenfallen, d. h. für $\sqrt{4c^2 - 12c + 1} = 0$. Dies tritt ein für $c = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$, was

$$x = \frac{1}{2c} = \frac{1}{3 \pm \sqrt{8}} = \frac{3 \mp \sqrt{8}}{(3 \pm \sqrt{8})(3 \mp \sqrt{8})} = 3 \pm \sqrt{8}$$

ergibt. Da die Ausnahmekurve den noch zu besprechenden durch $x = \frac{1}{3}$ und $x = 3$ gehenden Kreis umschließt, kann A nur an der Stelle $x = 3 + \sqrt{8} = 5,828$ liegen, so daß es sich um $c = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ und um die Gleichung der Niveaulinie $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \sim 0,086$ handelt. Der andere Schnittpunkt ergibt sich aus $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{1-x} = c$ für $c = 0,086$ als $x = 0,32$, der dritte aus $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = c$ als $x = -14,1$.

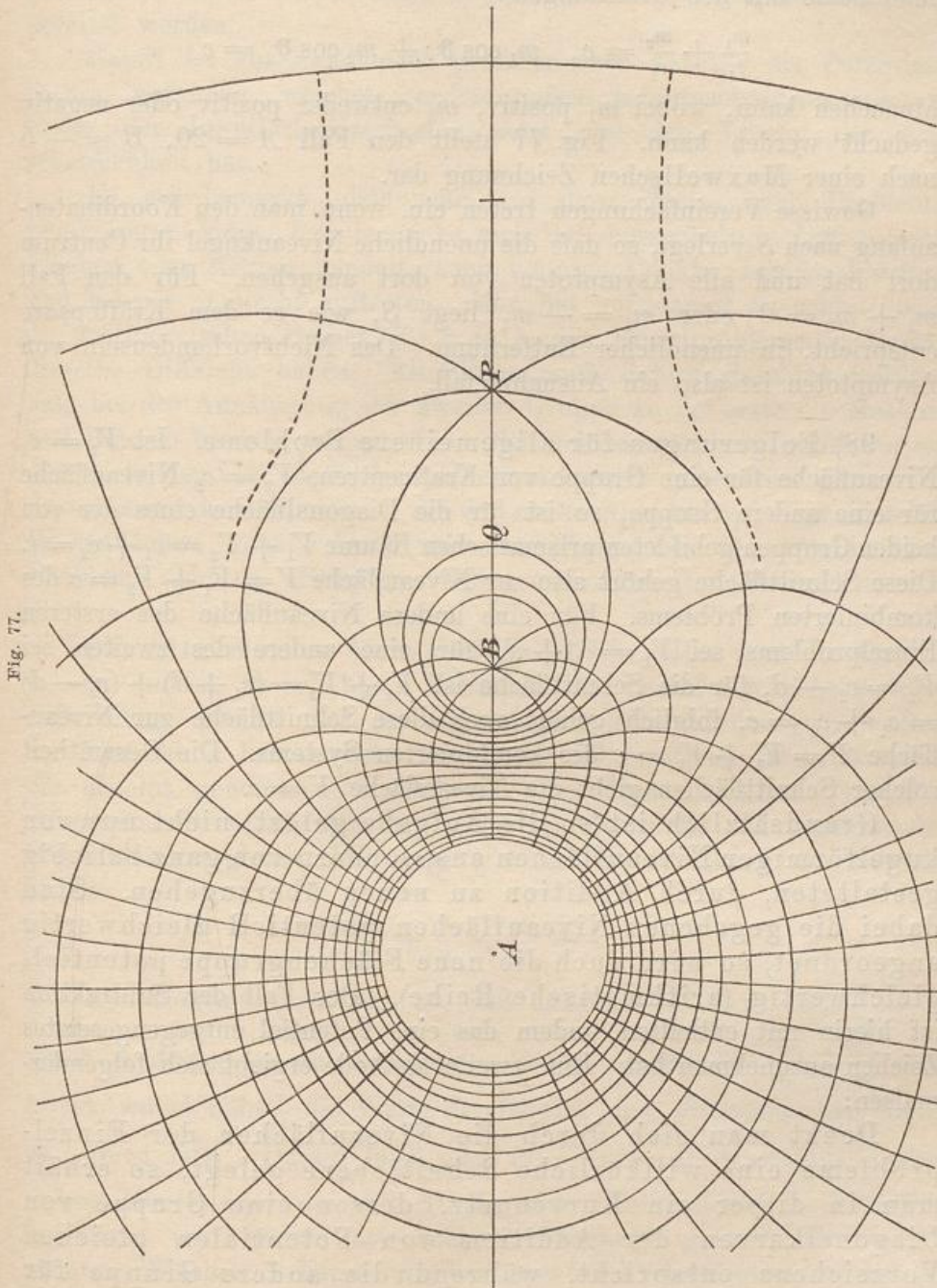
Daß zu den Niveaulinien ein Kreis gehört, folgt aus $\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0$ für $c=0$, d. h. aus $\frac{r_1}{r_2} = 2$. Es ist der Kreis, dessen Durchmesser BD durch die Punkte bestimmt wird, welche die Strecke M_1M_2 innerlich und äußerlich im Verhältnis 2:1 teilen, so daß $M_1B = \frac{2}{3}M_1M_2$ und $M_1D = \frac{3}{2}M_1M_2$ ist. M_1, B, M_2 und D sind harmonische Punkte.

Da für die mit der X -Achse zusammenfallende Asymptote $\cos \vartheta = 1$ ($\vartheta = 0$) ist, so ist $2 \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 = 1$ die Ausnahmekurve unter den Kraftlinien.

Über die Asymptoten und die Neigungen der Kraftlinien in M_1 und M_2 lassen sich noch Betrachtungen einfacher Art anstellen, auf die hier verzichtet werden soll.

Ist das Verhältnis der Ladungen von M_1 und M_2 allgemeiner $m_1 : (-m_2)$ und ist m_1 absolut größer als m_2 , so gehen m_2 der von M_1 ausstrahlenden m_1 Kraftröhren nach M_2 ,

der Rest $m_2 - m_1$ geht nach dem Unendlichen. Die zu den Niveauflächen gehörige unendlich große Kugel mit S als Centrum



wird durch die Kraftflächen wiederum in flächengleiche Streifen eingeteilt, genau so, als ob in S als Gesamtmasse $m_1 - m_2$ angebracht wäre.

Die Analogie zwischen den Zweipunktproblemen für gleichartige und ungleichartige Ladungen wird demnach doch eine derartige, daß man beide mit den Gleichungen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c, \quad m_1 \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2 = c$$

abmachen kann, wobei m_1 positiv, m_2 entweder positiv oder negativ gedacht werden kann. Fig. 77 stellt den Fall $A = 20$, $B = -5$ nach einer Maxwellschen Zeichnung dar.

Gewisse Vereinfachungen treten ein, wenn man den Koordinatenanfang nach S verlegt, so daß die unendliche Niveaукugel ihr Centrum dort hat und alle Asymptoten von dort ausgehen. Für den Fall $m_1 + m_2 = 0$ oder $m_1 = -m_2$ liegt S , wie es dem Kräftepaare entspricht, in unendlicher Entfernung. Das Nichtvorhandensein von Asymptoten ist also ein Ausnahmefall.

98) Folgerungen für allgemeinere Probleme. Ist $V_1 = c_1$ Niveaуfläche für eine Gruppe von Kraftcentren, $V_2 = c_2$ Niveaуfläche für eine andere Gruppe, so ist für die Diagonalfäche eines der von beiden Gruppen gebildeten prismatischen Räume $V_1 + V_2 = c_1 + c_2 = c$. Diese Schnittfläche gehört also zur Niveaуfläche $V = V_1 + V_2 = c$ des kombinierten Problems. Für eine andere Niveaуfläche des ersten Einzelproblems sei $V_1 = c_1 + d$, für eine andere des zweiten sei $V_2 = c_2 - d$, für die Schnittfläche ist $V_1 + V_2 = (c_1 + d) + (c_2 - d) = c_1 + c_2 = c$, folglich gehört auch diese Schnittfläche zur Niveaуfläche $V = V_1 + V_2 = c$ des kombinierten Systems. Die Gesamtheit solcher Schnittflächen giebt die Niveaуfläche $V = c$.

Grundsätzlich ist so die Aufgabe gelöst, nicht nur von kugelförmigen Niveaуflächen aus, sondern von ganz beliebig gestalteten, durch Addition zu neuen überzugehen. Sind dabei die gegebenen Niveaуflächen potentiell gleichwertig angeordnet, so wird auch die neue Flächengruppe potentiell gleichwertig (arithmetische Reihe). Der Fall der Subtraktion ist hierin mit enthalten, indem das eine Potential entgegengesetztes Zeichen anzunehmen hat. Eine zweite Methode ergiebt sich folgendermaßen:

Denkt man sich durch die Niveaуflächen der Einzelprobleme eine willkürliche Schnittebene gelegt, so erhält man in dieser ein Kurvennetz, dessen eine Gruppe von Diagonalkurven der Addition von Potentialen gleichen Vorzeichens entspricht, während die andere Gruppe für Addition von Potentialen entgegengesetzten Vorzeichens gilt.

An den kugelförmigen Niveaуflächen kann man sich diese Sätze klar machen, um sie dann auf ganz allgemein gestaltete zu über-