Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung

Das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizitaet, der Waerme und der Hydrodynamik

Holzmüller, Gustav

Leipzig, 1898

98) Folgerungen für allgemeine Problem

Die Analogie zwischen den Zweipunktproblemen für gleichartige und ungleichartige Ladungen wird demnach doch eine derartige, daſs man beide mit den Gleichungen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} = c, \quad m_1 \cos\vartheta_1 + m_2 \cos\vartheta_2 = c$$

abmachen kann, wobei m_1 positiv, m_2 entweder positiv oder negativ gedacht werden kann. Fig. 77 stellt den Fall $A = 20$, $B = -5$ nach einer Maxwellschen Zeichnung dar.

Gewisse Vereinfachungen treten ein, wenn man den Koordinatenanfang nach S verlegt, so daſs die unendliche Niveaukugel ihr Centrum dort hat und alle Asymptoten von dort ausgehen. Für den Fall $m_1 + m_2 = 0$ oder $m_1 = -m_2$ liegt S, wie es dem Kräftepaare entspricht, in unendlicher Entfernung. Das Nichtvorhandensein von Asymptoten ist also ein Ausnahmefall.

98) Folgerungen für allgemeinere Probleme. Ist $V_1 = c_1$ Niveaufläche für eine Gruppe von Kraftcentren, $V_2 = c_2$ Niveaufläche für eine andere Gruppe, so ist für die Diagonalfläche eines der von beiden Gruppen gebildeten prismatischen Räume $V_1 + V_2 = c_1 + c_2 = c$. Diese Schnittfläche gehört also zur Niveaufläche $V = V_1 + V_2 = c$ des kombinierten Problems. Für eine andere Niveaufläche des ersteren Einzelproblems sei $V_1 = c_1 + d$, für eine andere des zweiten sei $V_2 = c_2 - d$, für die Schnittfläche ist $V_1 + V_2 = (c_1 + d) + (c_2 - d) = c_1 + c_2 = c$, folglich gehört auch diese Schnittfläche zur Niveaufläche $V = V_1 + V_2 = c$ des kombinierten Systems. Die Gesamtheit solcher Schnittflächen giebt die Niveaufläche $V = c$.

Grundsätzlich ist so die Aufgabe gelöst, nicht nur von kugelförmigen Niveauflächen aus, sondern von ganz beliebig gestalteten, durch Addition zu neuen überzugehen. Sind dabei die gegebenen Niveauflächen potentiell gleichwertig angeordnet, so wird auch die neue Flächengruppe potentiell gleichwertig (arithmetische Reihe). Der Fall der Subtraktion ist hierin mit enthalten, indem das eine Potential entgegengesetztes Zeichen anzunehmen hat. Eine zweite Methode ergiebt sich folgendermaſsen:

Denkt man sich durch die Niveauflächen der Einzelprobleme eine willkürliche Schnittebene gelegt, so erhält man in dieser ein Kurvennetz, dessen eine Gruppe von Diagonalkurven der Addition von Potentialen gleichen Vorzeichens entspricht, während die andere Gruppe für Addition von Potentialen entgegengesetzten Vorzeichens gilt.

An den kugelförmigen Niveauflächen kann man sich diese Sätze klar machen, um sie dann auf ganz allgemein gestaltete zu übertragen. Orthogonal gehen durch die Schar der neuen Niveauflächen die Kraftlinien. Die Kraftröhren des kombinierten Problems können aus denen der Einzelprobleme ebenfalls durch Diagonalschnitte abgeleitet werden.

Damit ist ein Fundament geometrischer Art für die Potentialtheorie gefunden, welches gewissermafsen Infinitesimalgeometrie an Stelle der Infinitesimalrechnung setzt und den Vorzug der Anschaulichkeit hat.

Es sei bemerkt, dafs man auf diese Weise auch Probleme kombinieren kann, bei denen es sich um massenbelegte Linien oder Flächen oder Körper handelt, auch könnten Punkte, Linien, Flächen und Körper gemischt auftreten. Man hat nur darauf zu achten, dafs die arithmetischen Reihen für c in beiden Einzelproblemen jedesmal dieselbe Differenz haben. Allerdings mufs darauf geachtet werden, dafs bei der Annäherung der zweiten Gruppe an die erste die Massenverteilungen bleiben, wie sie sind. Bei elektrostatischen Problemen ist dies nicht der Fall, denn die Influenzwirkungen geben eine ganz neue Anordnung. Erst wenn man die der neuen Anordnung entsprechenden Niveauflächen kennt, kann man aus ihnen die des kombinierten Problems ableiten. Beispiele werden unten zur Darstellung kommen.

99) Allgemeines Mehrpunktproblem. Hat man die Massen m_1, m_2 und m_3 in beliebigen Raumpunkten, wobei sämtliche positiv, oder einige positiv und der Rest negativ sein können [wir wollen der Einfachheit halber stets die Summe der positiven als gröfser, als die absolut genommene Summe der negativen annehmen (was der Allgemeinheit nicht schadet), oder im Grenzfalle die algebraische Gesamtsumme gleich Null setzen], so ist die Gleichung der Niveauflächen

$$\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} = c.$$

Die Konstruktion geschieht so, dafs man aus $\frac{m_1}{r_1} = c_1$ und $\frac{m_2}{r_2} = c_2$ durch Addition im obigen Sinne zunächst die Flächen $\frac{m_1}{r_2} + \frac{m_2}{r_2} = k$ bildet, wobei man k die Werte der Glieder einer arithmetischen Reihe annehmen läfst. Darauf läfst man in $\frac{m_3}{r_3} = c_3$ die Konstante c_3 dieselben Werte oder die der Glieder einer Reihe derselben Differenz annehmen und findet nach vorigem Abschnitt geometrisch die gesuchten Flächen. Diese werden von den Kraftlinien senkrecht durchsetzt.

Ist die Summe der Massen verschieden von Null, dann giebt es im Endlichen einen Schwerpunkt S. Zu den Niveauflächen gehört